Spieltheorie

Tomas Sauer

Lehrstuhl für Mathematik mit Schwerpunkt Digitale Bildverarbeitung
FORWISS
University of Passau
Innstr. 43
94032 Passau

Version 2.0
Letzte Änderung: 3.12.24

Links were electronic now, not narrative ... Until the advent of hyperlinks, only God had been able to see simultaneously into past, present and future alike; human beings were imprisoned in the calendar of their days.

S. Rushdie, *Fury*

Nothing spoils numbers faster than a lot of arithmetic.

Peppermint Patty, *The Peanuts, 4.12.1968*

Arithmetic, you see, is useful; without its aid, I should hardly have been able to guess your age.

Ch. Brontë, *Jane Eyre*

Heute haben wir die experimentelle und mathematische Naturwissenschaft und laufen nicht mehr Gefahr, der Mystik in die Arme zu fallen. Wir können uns aber neue Hilfsarbeiter für die Erkenntnis heranziehen.

K. Laßwitz, *Aspira. Geschichte einer Wolke*

To isolate mathematics from the practical demands of the sciences is to invite the sterility of a cow shut away from the bulls.

P. Chebyshev

Eine Bemerkung zur verwendeten Orthographie:

Ich spreche und schreibe Deutsch. Das große, weite und tiefe Deutsch, das die Reformer nicht verstehen. Und nicht ertragen.

R. Menasse

Tomas Sauer
Lehrstuhl für Mathematik mit Schwerpunkt Digitale Bildverarbeitung
University of Passau
Innstr. 43
94032 Passau

Inhaltsverzeichnis

Grundideen der Spieltheorie: Bei–Spiele | 1

Sicher können Computer Probleme lösen, Informationen speichern, kombinieren und Spiele spielen — aber es macht ihnen keinen Spaß.

(L. Rosten)

Spieltheorie befasst sich mit der Frage, wie man in Konfliktsituationen optimale Entscheidungen trifft. Um es mit Karlin [17] zu sagen:

> *The art of making optimal judgments according to various criteria is as old as mankind; it is the essence of every field of endeavor from volleyball to logistics*[1]*. The science of making such judgments, as opposed to the mere art, is a newer development …*

In diesem ersten Kapitel wollen wir uns anhand von ein paar Bei–Spielen eine Übersicht über die wesentlichen Ansätze und Ideen verschaffen, bevor wir uns dann vertieft an die *mathematischen* Grundlagen machen.

1.1 Stein, Schere, Papier, Formalismus

Ein klassisches Kinder- und nicht nur Kinderspiel ist *Stein, Schere, Papier*, bei dem zwei Spieler, nennen wir sie kreativ S_1 und S_2, gleichzeitig mit jeweils einer Hand entweder einen Stein (Faust), eine Schere (Zeige- und Mittelfinger gespreizt) oder Papier (flache Hand) darstellen. Der Gewinner wird dann nach folgenden Regeln ermittelt:

1. Der Stein macht die Schere stumpf, also gewinnt Stein gegen Schere.
2. Die Schere schneidet Papier, also gewinnt die Schere gegen das Papier.
3. Das Papier wickelt den Stein ein, also gewinnt Papier gegen Stein.

Man sieht, die Situation ist schön symmetrisch und es gibt entweder ein Unentschieden[2] oder ein Spieler gewinnt und der andere verliert. In letzterem Fall können wir davon ausgehen, daß ein Gewinn[3] vom Verlierer an den Sieger übertragen wird. Diese Situation bezeichnet man als ein *Nullsummenspiel*: Was einer gewinnt, das muß der andere verlieren. Normieren wir den Gewinn zu 1, dann können wir das Ergebnis des Spiels jeweils aus der Sicht der beiden Spieler in Tabellenform darstellen:

[1] Wir werden uns hier allerdings weder mit Volleyball noch mit Logistik befassen, dafür mit Fußnoten.
[2] Wenn beide Spieler dieselbe Wahl getroffen haben.
[3] Beispielsweise eine Einheit Geld – der Phantasie sind hier keine Grenzen gesetzt, aber für unsere Zwecke hier ist es völlig irrelevant.

$S_1 \setminus S_2$	St	Sch	P
St	0	1	-1
Sch	-1	0	1
P	1	-1	0

$S_1 \setminus S_2$	St	Sch	P
St	0	-1	1
Sch	1	0	-1
P	-1	1	0

Das sind die *Auszahlungstabellen* für S_1 (links) und S_2 (rechts), die wir als Mathematiker natürlich auch als Matrizen darstellen können und werden, nämlich als

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.1.1}$$

und die Tatsache, daß wir es mit einem Nullsummenspiel zu tun haben, ist dann schlicht und ergreifend äquivalent zu $A_1 + A_2 = 0$. So können wir natürlich nun jedes Zweipersonenspiel darstellen: Hat Spieler S_1 die Wahlmöglichkeiten oder *Strategien* $s_{1,1}, \dots, s_{1,m}$ und Spieler S_2 entsprechend[4] $s_{2,1}, \dots, s_{2,n}$ zur Verfügung, dann stellen wir das Spiel durch die beiden *Auszahlungsmatrizen* $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dar, die sich aus den *Auszahlungsfunktionen* F_1, F_2 durch

$$(\boldsymbol{A}_\ell)_{jk} = F_\ell \left(s_{1j}, s_{2k} \right), \qquad \ell = 1, 2,$$

ergeben. Und nochmals langsam: In unserem Beispiel haben wir es mit den *symmetrischen* Strategien

$$\begin{aligned} \textsf{Stein} &= s_{11} = s_{12} =: s_1, \\ \textsf{Schere} &= s_{21} = s_{22} =: s_2, \\ \textsf{Papier} &= s_{31} = s_{32} =: s_3 \end{aligned}$$

zu tun.

Beim nächsten Spiel sind zwar immer noch zwei Personen beteiligt, aber es hat dennoch eine ganz andere Struktur, da es sich um kein Nullsummenspiel mehr handelt.

Beispiel 1.1.1 (Gefangenendilemma). Zwei Verbrecher werden festgenommen und getrennt voneinander verhört. Der Polizei ist klar, daß sie beide eine Menge auf dem Kerbholz haben, kann aber leider nur kleinere Vergehen wirklich nachweisen[5]. Deswegen erhalten beide das Angebot, als Kronzeuge gegen den anderen auszusagen – in diesem Falle würde der Kronzeuge einen Strafnachlass erhalten, der nicht geständige Verbrecher hingegen die volle Härte der Justiz genießen dürfen. Wenn allerdings beide geständig sind, dann braucht man keinen Kronzeugen mehr und der Rabatt ist dahin. In negativen Jahren Gefängnis sehen die Auszahlungsmatrizen wie folgt aus[6]:

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_2^T = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix},$$

wobei s_1 = „schweigen“ und s_2 = „aussagen“ ist. Ist es besser zu schweigen oder auszusagen? Was ist die optimale Strategie? Hängt das von den konkreten Zahlen ab?

[4] Es hat niemand gesagt, daß Spiele immer symmetrisch sein müssen und daß beide Spieler immer dieselbe Anzahl an Strategien haben.

[5] Das ist nicht so unrealistisch: So wurde beispielsweise Al Capone nur wegen Steuerhinterziehung angeklagt und verurteilt.

[6] Und im Gegensatz zu *Stein, Schere, Papier* liegt das Interesse der Spieler daran, die „Auszahlung“ in Jahren zu *minimieren*, deswegen der Vorzeichenwechsel.

Beispiel 1.1.1 ist offensichtlich kein Nullsummenspiel, denn

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ -8 & -14 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Trotzdem kann man es zu einem Nullsummenspiel machen, indem man einen Spieler S_3, den „Staatsanwalt“, einführt, der nur eine Strategie und die Auszahlungsmatrix $A_3 = -A_1 - A_2$ hat – trivialerweise ist dann $A_1 + A_2 + A_3 = 0$. Allerdings haben wir es dann nicht mehr mit einem Zweipersonenspiel zu tun, sondern mit einem Dreipersonenspiel, und wir sehen bereits eine wesentliche Eigenart von n–Personenspielen mit $n > 2$: Es wird *Kooperation* möglich, bei der mehrere Spieler gegen andere Spieler *Koalitionen* bilden können. Auszusagen ist im Sinne von Beispiel 1.1.1 dann genau die Kooperation oder Koalition des Delinquenten mit der Justiz, zu schweigen hingegen die Koalition mit dem anderen Spieler.

Beispiel 1.1.2 (Koalitionen). Das klassische und aus der Politik bekannte Mehrpersonenspiel heißt „Koalition“. Nehmen wir an, ein Parlament habe 9 Sitze, die sich auf die drei Parteien S, C und F wie folgt verteilen:

Partei	S	C	F
Sitze	4	4	1

Es ist naheliegend, daß die beiden großen Parteien lieber mit F koalieren werden als miteinander, denn sie werden in solch einer Koalition natürlich ein größeres Stück vom Kuchen bekommen. Was ist also das optimale oder fairste Angebot, das die Parteien einander für Koalitionen machen können?

In diesem Sinne können wir ja auch das Gefangenendilemma aus Beispiel 1.1.1 sehen: Die Spieler können entweder miteinander oder mit der Justiz kooperieren, also mit dem unsichtbaren dritten Spieler, der nur eine Strategie zur Auswahl hat, nämlich abwarten, was die beiden machen.

1.2 Optimale Strategien – reine und gemischte Strategien

Wieder ist *Stein, Schere, Papier* ein gutes Beispiel: Die eigentliche Kunst dieses Spiels in der Realität liegt in der Fähigkeit, die Entscheidung des Gegners vorherzusagen und entsprechend dagegen zu handeln – das ist die wirkliche Bedeutung des im Sport so oft mißbrauchten Wortes „antizipieren“. Tatsächlich könnten wir auch vom „Elfmeterdilemma“ sprechen: Wohin schießt der Schütze am besten und wohin springt der Torwart idealerweise. Wenn einer die Präferenzen des anderen kennt, dann ist er im Vorteil. Nur ist diese Psychologie leider mathematisch nicht wirklich fassbar[7] und deswegen gehen wir bei der Bestimmung der optimalen Lösung immer davon aus, daß wir es mit einem Gegner zu tun haben, der vernünftig agiert[8] und seinerseits die beste Strategie wählt. Das führt zur folgenden Grundannahme der Spieltheorie.

Axiom 1.2.1. *Die Optimallösung besteht aus derjenigen Strategie, die bei bester Strategiewahl des Gegners das beste Ergebnis erzielt.*

[7] Zumindest beim Elfmeter stimmt das nicht so wirklich: Schützen wie Torhüter haben normalerweise bessere und schlechtere Seiten, die sich aus der „Händigkeit“ ergeben, aber das müsste man dann halt in der Auszahlungsmatrix berücksichtigen.

[8] Was nicht erst seit Loriots klassischem Sketch vom Skatspieler nicht immer und uneingeschränkt zutreffen muss.

Dabei betrachten wir zuerst das Nullsummenspiel! Hier wird S_1 sich also alle seine Strategien $s_{11}, \dots, s_{1m}$ ansehen und annehmen, daß S_2 clever genug ist, in jedem Fall die *beste* Gegenstratgie zu wählen, daß also für $j = 1, \dots, m$ die Strategie s_{2k} mit von j abhängigem $k = k(j)$ gewählt wird, so daß

$$(A_2)_{jk} = \max_{k'=1,\dots,n} (A_2)_{jk'} = \max_{k'=1,\dots,n} (-A_1)_{jk'} = \min_{k'=1,\dots,n} (A_1)_{jk'} ,$$

und dann wird S_1 das beste unter diesen j auswählen:

$$(A_1)_{jk} = \max_{j'=1,\dots,m} \min_{k'=1,\dots,n} (A_1)_{j',k'} . \tag{1.2.1}$$

Diese Vorgehensweise bestimmt aber nur j! Der Index k der Strategie, die S_2 wählt, ergibt sich als Lösung des analogen *Minimax–Problems*

$$(A_1)_{jk} = \min_{k'=1,\dots,n} \max_{j'=1,\dots,m} (A_1)_{j',k'} , \tag{1.2.2}$$

und im allgemeinen gilt, daß $\max_j \min_k \neq \min_k \max_j$ – im Falle von Gleichheit spricht man dann von einem *Sattelpunkt.*

Beispiel 1.2.2. S_1 will seine optimale Strategie für *Stein, Schere, Papier* bestimmen und bildet daher für jedes j, also jede Zeile von A_1, die Minima:

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \boxed{-1} \\ \boxed{-1} & 0 & 1 \\ 1 & \boxed{-1} & 0 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ -1 \end{array}$$

und wenn er nun maximiert, dann ist er so schlau wie zuvor, denn das Maximum ist wieder -1 und wird für alle drei Strategien angenommen.

Beispiel 1.2.3. Natürlich gibt es auch Matrizen mit Sattelpunkt, beispielsweise

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{array} \right],$$

denn hier liefert max min die Auswahl

$$\left[\begin{array}{cc} \boxed{1} & 2 \\ -1 & \boxed{-2} \end{array} \right] \begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array} \qquad \longrightarrow \qquad \left[\begin{array}{cc} \boxed{1} & 2 \\ -1 & -2 \end{array} \right],$$

was dasselbe Resultat liefert wie die min max–Suche:

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} \boxed{1} & \boxed{2} \\ -1 & -2 \end{array} \right] \\ \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \end{array} \qquad \longrightarrow \qquad \left[\begin{array}{cc} \boxed{1} & 2 \\ -1 & -2 \end{array} \right].$$

Die Wahl einer derartigen *reinen Strategie* liefert uns also, wie Beispiel 1.2.2 zeigt, keine besonders aufregenden Resultate für *Stein, Schere, Papier* – alle Strategien sind absolut gleichwertig. Andererseits wird es sich zeigen, daß Spiele mit Sattelpunkt generell nicht besonders interessant und „spielenswert“ sind, also ist die Suche nach Sattelpunkten entweder erfolglos oder aber nicht besonders relevant. Daher nehmen wir einen etwas anderen Standpunkt ein und nehmen an, die Spieler wählen jede ihrer Strategien mit einer *Wahrscheinlichkeit* p_j bzw. q_k, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$. Diese *gemischten Strategien* umfassen auch den Fall reiner Stragien, indem man ein p_j und ein q_k gleich 1 setzt. Die *erwartete* Auszahlung für ein Nullsummenspiel ist dann

$$E\left(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\right) := \pm \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \left(\boldsymbol{A}_1\right)_{jk} p_j \, q_k = \pm \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{q},$$

mit

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix},$$

und S_1 versucht nun, den Wahrscheinlichkeitsvektor $\boldsymbol{p}$ so zu wählen, daß dieser Ausdruck maximiert wird, wohingegen S_2 sein $\boldsymbol{q}$ so wählt, daß der Ausdruck minimiert wird. Die *lineare* Funktion $E\left(A_1, \cdot, \boldsymbol{q}\right)$ nimmt[9] ein Extremum, ganz egal welches, entweder in einem Randpunkt an, das heißt, wenn $p_j = 0$ für mindestens ein j ist, oder aber, wenn der Gradient den Wert 0 hat. Letzteres ist ziemlich unwahrscheinlich, denn es würde fordern, daß für $\ell = 1, \dots, m$

$$0 = \frac{\partial}{\partial p_\ell} E\left(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\right) = \frac{\partial}{\partial p_\ell} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \left(\boldsymbol{A}_1\right)_{jk} p_j \, q_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\boldsymbol{A}_1\right)_{\ell k} q_k,$$

also

$$0 = \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{q} = E\left(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\right), \qquad \text{für alle } \boldsymbol{p}$$

ist. Aber Moment mal – hier ist eine interessante Beobachtung: Ist die Matrix A_1 *nicht* invertierbar[10], und gibt es[11] $\boldsymbol{p} \geq 0$ oder $\boldsymbol{q} \geq 0$, so daß $\boldsymbol{p}^T A_1 = 0$ oder $A_1 \boldsymbol{q} = 0$ ist, und wählt der entsprechende Spieler diese gemischte Strategie, dann kann sein Kontrahent machen, was er will – das erwartete Ergebnis ist 0 und zwar vollkommen *unabhängig* von der Strategie des anderen Spielers.

Beispiel 1.2.4 (Stein, Schere, Papier). Diese Unabhängigkeit ist auch das, was man erwarten würde, wenn einer der Spieler (beispielsweise ein Computer) strikt gleichverteilt zufällig spielt, denn dann kann der andere Spieler machen, was er will, das Spiel ist ein reines Glücksspiel, und man kann genausogut gleich um die Wette würfeln. Und wie's der Zufall will[12], ist das auch noch die optimale Strategie, vorausgesetzt, man hat keinen psychologischen Vorteil.

Aber die gemischten Strategien erlauben noch eine andere Sichtweise des Spiels, nämlich das Ersetzen der Auszahlungs*matrix* A_1 durch eine *bilineare* Auszahlungs*funktion*

$$f_1 \; : \; \mathbb{S}_m \times \mathbb{S}_n \to \mathbb{R}, \qquad f_1\left(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\right) = \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{q}, \tag{1.2.3}$$

wobei

$$\mathbb{S}_k = \left\{ \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^k \; : \; p_j \geq 0, p_1 + \cdots + p_k = 1 \right\}$$

das k–dimensionale *Einheitssimplex* bezeichnet[13]. Für solche Funktionen gilt dann eine der wesentlichen Aussagen der Spieltheorie, nämlich das *Minimax–Theorem*, das uns sagt, daß im gemischten Sinne *jedes* Zweipersonen–Nullsummenspiel (genau) einen Sattelpunkt besitzt.

[9] Für festes $\boldsymbol{q}$.

[10] Beispielsweise, wenn $m \neq n$ ist!

[11] Achtung: Positivität ist eine Forderung, denn wir wollen Wahrscheinlichkeiten und die dürfen keine negativen Einträge haben.

[12] Was bei Wahrscheinlichkeiten ja Programm ist.

[13] Mehr dazu später.

Satz 1.2.5 (Minimax–Theorem). *Für jede Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gilt*

$$\max_{\boldsymbol{p} \in \mathbb{S}_m} \min_{\boldsymbol{q} \in \mathbb{S}_n} \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{q} = \min_{\boldsymbol{q} \in \mathbb{S}_n} \max_{\boldsymbol{p} \in \mathbb{S}_m} \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{q}. \tag{1.2.4}$$

Dieses Resultat werden wir natürlich auch noch beweisen, und zwar als Satz 2.3.1.

1.3 Der einfachste Fall

Schauen wir uns einmal den einfachsten Fall eines Spieles an, nämlich ein Zweipersonen–Nullsummenspiel mit nur jeweils zwei Strategien, und somit der Auszahlungsmatrix

$$\boldsymbol{A}_1 = -\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Bei den gemischten Strategien $(p, 1-p)$ und $(q, 1-q)$ ist die zu erwartende Auszahlung

$$\begin{aligned} E(p,q) &= apq + bp(1-q) + c(1-p)q + d(1-p)(1-q) \\ &= d + p(b-d) + q(c-d) + pq(a-b-c+d) \\ &= d + p(b-d) + q\left[(a-b-c+d)p + c - d\right] \\ &= d + q(c-d) + p\left[(a-b-c+d)q + b - d\right]. \end{aligned}$$

Ist also $a + d \neq b + c$, dann können beide Spieler das Spiel ***unabhängig*** von der Wahl des Gegners machen, indem sie

$$p = \frac{d-c}{a-b+d-c} \qquad \text{und} \qquad q = \frac{d-b}{a-c+d-b} \tag{1.3.1}$$

wählen. Nun sollten das natürlich auch Wahrscheinlichkeiten sein, also $0 \leq p, q \leq 1$ erfüllen; etwas komplizierter geschrieben: Es sollte

$$1 \leq p^{-1} = \frac{a-b+d-c}{d-c} = 1 + \frac{a-b}{d-c} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a-b}{d-c} \geq 0$$

sein. Wenn das nicht der Fall ist, dann haben $b-a$ und $d-c$ dasselbe Vorzeichen. Sind diese Vorzeichen beide

positiv, das heißt, ist $b > a$ und $d > c$, dann wird S_2 auf jeden Fall Strategie 1 wählen, sind sie beide

negativ, dann ist $b < a$ und $d < c$ und S_2 wird sich auf alle Fälle für Strategie 2 entscheiden[14],

aber in beiden Fällen kann S_1 sich nun die für ihn günstigere Zeile aussuchen und beide Spieler würden sich nur verschlechtern, wenn sie die Strategie wechseln. Mit anderen Worten: *Das Spiel hat einen Sattelpunkt.* Dasselbe Argument trifft natürlich auch für die Wahl von q zu und wir können die folgende Beobachtung machen.

Lemma 1.3.1. *Die nach* (1.3.1) *bestimmten Zahlen p und q liegen genau dann in* $[0,1]$ *und sind somit Wahrscheinlichkeiten bzw. gemischte Strategien, wenn das Spiel* keinen *Sattelpunkt hat.*

[14] Sofern S_2 vernünftig spielt …

Damit sind wir im Geschäft: Entweder hat das Spiel einen Sattelpunkt und wird sich auf diesem einpendeln, oder es gibt zwei gemischte Strategien, die den Ausgang des Spieles jeweils von der anderen Strategie unabhängig machen. Nennen wir diese beiden p^* und q^*. Dann ist

$$v := E\left(p^*, q^*\right) = \min_{q\in[0,1]} E\left(p^*, q\right) = \max_{p\in[0,1]} E\left(p, q^*\right)$$

und somit

$$\max_{p\in[0,1]} \min_{q\in[0,1]} E\left(p,q\right) \ge v \ge \min_{q\in[0,1]} \max_{p\in[0,1]} E\left(p,q\right). \tag{1.3.2}$$

Umgekehrt gilt aber sogar die folgende allgemeine Tatsache.

Lemma 1.3.2. *Für jede reellwertige Funktion* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *gilt*

$$\inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} f(x,y) \ge \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} f(x,y). \tag{1.3.3}$$

Sind X und Y kompakt und ist f stetig, dann kann man sup *und* inf *auch durch* min *und* max *ersetzen.*

Beweis: Da für jedes $y \in Y$ die Ungleichung

$$\sup_{x\in X} f(x,y) \ge f(x',y), \qquad x' \in X,$$

erfüllt ist, gilt auch

$$\inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} f(x,y) \ge \inf_{y\in Y} f(x',y), \qquad x' \in X. \tag{1.3.4}$$

Eine weitere Supremumsbildung bezüglich x' in (1.3.4) liefert dann

$$\inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} f(x,y) = \sup_{x'\in X} \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} f(x,y) \ge \sup_{x'\in X} \inf_{y\in Y} f(x',y) = \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} f(x,y),$$

also genau (1.3.3). Die Kompaktheits- und Stetigkeitsaussagen sollten aus der Analysis [8, 13] bekannt sein. □

Kombinieren wir also nun (1.3.3) mit (1.3.2), dann ist letztendlich

$$v = E\left(p^*, q^*\right) = \max_{p\in[0,1]} \min_{q\in[0,1]} E\left(p,q\right) = \min_{q\in[0,1]} \max_{p\in[0,1]} E\left(p,q\right)$$

und damit sind die unabhängigen Strategien auch *optimale* Strategien. Der Erwartungswert v bei optimaler Spielweise heißt auch *Wert* („*V*alue“) des Spiels; ist er positiv, dann bevorzugt das Spiel S_1, ist er negativ, dann kommt S_2 besser davon und ist er gleich 0, dann nennt man das Spiel *fair*.

Bemerkung 1.3.3. Nochmal zur Klarstellung: *Im Fall von Zweipersonen-Nullsummenspielen* mit jeweils zwei Strategien besteht das optimale Vorgehen darin, den anderen Spieler zu neutralisieren, also p^* und q^* so zu wählen, daß $E(p^*, \cdot)$ und $E(\cdot, q^*)$ *konstant* ist, denn dann gilt (1.3.2) und wegen (1.3.3) muss Gleichheit gelten und wir haben einen Sattelpunkt. Leider[15] gilt das nicht mehr für mehr als zwei Strategien. genau dieser konstante Wert

[15]Oder auch nicht, sonst wäre es ja langweilig.

Bemerkung 1.3.4. Die explizite Formel (1.3.1) für die optimalen Strategien p^*, q^* eines Zweipersonen–Nullsummenspiels ändert sich nicht, wenn man zu jeder Auszahlung denselben Wert addiert, also A_1 durch

$$A_1' = A_1 + c \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =: A_1 + c\, \mathbf{1}\mathbf{1}^T$$

ersetzt[16], oder wenn man A_1 mit einem beliebigen, von 0 verschiedenen Wert multipliziert[17]. Damit gilt aber auch:

1. Der Wert eines Spieles wird immer mit denselben Strategien bestimmt und kann durch Addition von

$$c\ [p^*, 1-p^*] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^* \\ 1-q^* \end{bmatrix} = c\,[p^*, 1-p^*] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c$$

   auf jeden beliebigen anderen Wert gebracht werden.

2. Ersetzt man A_1 durch $A_1' = A_1 - v\mathbf{1}\mathbf{1}^T$, dann ist das zu A_1' gehörige Spiel fair.

Die wahre Kunst besteht in der Erfindung von Spielen, die auf ganz subtile Weise unfair sind, und sei es nur durch eine minimale Veränderung der Regeln, siehe beispielsweise Übung 2.1.1 oder das *Skin Game* aus Beispiel 2.3.3.

Übung 1.3.1 Das Daiquiri–Spiel aus [34]: Zwei Männer, Alex und Olaf, sitzen in einer Bar und vereinbaren folgendes Spiel. Beide legen jeweils ein oder zwei Streichhölzer für den anderen unsichtbar auf den Tresen. Stimmen die Zahlen überein, so muß Alex seinem „Freund“ Olaf diese Anzahl an Daiquiris ausgeben (zu je 5.50 Euro), andernfalls kommt Alex mit der Zahlung von einem Euro davon. Welchen Betrag muß Olaf vorher an Alex geben, damit das Spiel fair ist? ◇

1.4 Vollständige und unvollständige Information

Die Bei–Spiele, die wir bisher betrachtet haben, haben die Gemeinsamkeit, daß sie für beide Spieler absolut *unvollständige* Information bieten, denn keiner der beiden Spieler weiß, wie sich der andere entscheidet, die Strategien werden unabhängig voneinander gewählt.

Das Gegenstück dazu sind Spiele mit *vollständiger* Information, bei denen jeder Spieler zu jedem Zeitpunkt die gesamte Spielsituation kennt und seine Strategie entsprechend anpassen kann; Beispiele hiefür sind Schach oder *Russisch Roulette*, bei dem allerdings ein

---

[16]Zur Erinnerung: Für zwei Vektoren x, y beliebiger, nicht notwendig gleicher Länge ist $xy^T = \left[x_j y_k \ :\ j,k\right]$ eine Matrix vom Rang 1, manchmal auch als *Tensorprodukt* oder *Kroneckerprodukt*, siehe z.B. [21, 33], der beiden Vektoren bezeichnet. Insbesondere ist

$$\mathbf{1}\mathbf{1}^T = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

die Matrix, die aus lauter Einsen besteht (aber nicht die Einheitsmatrix!) und in Matlab bzw. Octave unter dem Namen `ones` abrufbar ist.

[17]Für die Strategie ist es irrelevant, ob man um Euro oder Cent spielt.

Zufallsaspekt dazukommt[18]. Solche Spiele sind, wie bereits in [26] bewiesen, immer determiniert, das heißt, sie haben immer einen Sattelpunkt und damit gibt es a priori eine optimale Strategie. Für Schach bedeutet das, daß man das Spiel eigentlich nicht spielen zu bräuchte, sofern es nur komplett verstanden ist, denn der Sattelpunkt würde ja entweder sicheren Sieg für Weiß, sicheres Remis oder sicheren Sieg für Schwarz bedeuten. Glücklicherweise ist Schach zu komplex, um sich vollständig erfassen zu lassen, so daß die „mechanische“ Behandlung von Schach darin besteht, eine gewisse Menge von Halbzügen vorauszuberechnen, dann die resultierenden Stellungen zu bewerten und entsprechend lokal optimale Strategien zu wählen. Die Kunst bei der Erstellung eines guten Schachprogramms liegt daher auch weniger in der Anzahl der Halbzüge (das ist „brute force“ und der Rechenaufwand wächst exponentiell mit der Berechnungstiefe), sondern in der Bewertung von Stellungen und der rechtzeitigen Elimination schlechter Züge. Frühe Schachprogramme konnten lediglich Matt erkennen und haben ansonsten aufsummiert, wieviel „Material“ noch auf dem Brett war, aber heute sind bereits Mobiltelefone deutlich spielstärker.

Viele Kartenspiele wie *Skat*, *Schafkopf*, *Bridge*, *Poker* beziehen ihren Reiz daraus, daß die Information nicht vollständig aber eben auch nicht vollkommen unvollständig ist[19] und daß man eventuell sogar vorsätzlich falsche Informationen übermitteln kann. Bei derartigen Spielen kann man sich durch gutes Erinnerungsvermögen und ein bißchen Wahrscheinlichkeitsrechnung zumindest einen gewissen Vorteil verschaffen, wie auch bei Blackjack. Das ist übrigens angeblich auch der Grund, warum technische Hilfsmittel in Spielcasinos verboten sind.

Generell kann die Informationsverteilung in manchen Spielen auch sehr unterschiedlich sein, vom „allwissenden“ Spielleiter bis hin zu rollenabhängigen Informationen; ein schönes Beispiel hierfür ist [6]. All das sind Aspekte, die man kaum mehr oder nur mit sehr großem Aufwand mathematisch beschreiben kann, und deswegen entziehen sich auch die meisten oder zumindest die besten Gesellschaftsspiele dem Formalismus dieses Buchs, was sie allerdings in keinster Weise reizlos macht – weder die Spiele noch das Buch!

1.5 Endliche und unendliche Spiele

Unser bisheriger Formalismus konnte nur *endliche* Spiele behandeln, also Spiele, bei denen jedem Spieler nur endlich viele Strategien zur Verfügung stehen. Durch die gemischten Strategien weicht man dann zwar auf eine kontinuierliche Menge aus, aber die Endlichkeit des Spiels liefert uns zumindest einen endlichdimensionalen Raum. Trotzdem gibt es auch Spiele, die unendlich viele Stragien, ja sogar ein Kontinuum von Strategien ermöglichen, typischerweise die sogenannten „Stopprobleme“.

Beispiel 1.5.1 (Duell). Zwei Schützen stehen sich zu einem Duell gegenüber[20] und dürfen zum selben Zeitpunkt die Pistole heben, dann zielen und, wann immer sie wollen, schießen. Je mehr Zeit sich ein Schütze zum Zielen läßt, desto höher wird seine Trefferwahrscheinlichkeit, aber natürlich auch das Risiko, getroffen zu werden. Wann ist der optimale Zeitpunkt um abzudrücken?

Soviel schon mal im Voraus: Die mathematische Behandlung solcher Spiele, die sich mit dem Timing von Aktionen befassen, siehe [17, Vol II, S. 101ff], hängt auch davon ab, ob

[18] Solange man es nicht mit einer Automatikpistole spielt – solche Fälle werden immer wieder auf einschlägigen Internetseiten berichtet.

[19] Eine Karte, die ich habe, kann der Gegner schon einmal nicht haben, außerdem erlauben auch die Ansagen oder Koalitionen Rückschlüsse auf Kartenverteilungen.

[20] Wer will kann ja annehmen, daß es sich bei einem der beiden um Evariste Galois handeln würde.

mit oder ohne Schalldämpfer gearbeitet wird, ob ein Duellant also weiß, daß sein Kontrahent vorbeigeschossen[21] hat oder nicht – wir sind also auch bereits wieder bei der Frage nach der Vollständigkeit der Information. Mathematisch werden wir sie hier nicht behandeln, aber die Erweiterung ist eigentlich gar nicht so schlimm, aus Matrizen werden *Kerne*, also Abbildungen $K : X \times Y \to \mathbb{R}$, wobei X, Y die Strategiemengen der Spieler sind, die Wahrscheinlichkeitsdichten $p : X \to \mathbb{R}$ und $q : Y \to \mathbb{R}$ werden kontinuierlich und als Erwartungswert ergibt sich statt $\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{q}$ dann

$$\langle p, Aq \rangle = \int_X \int_X p(x) q(y) K(x, y) \, dx \, dy.$$

Mehr dazu in [17].

[21] Einen Treffer würde er schon merken …

2 Zweipersonen–Nullsummenspiele

Sine victoriae spe nemo volens in aciem descendit.
Ohne Hoffnung auf Sieg zieht niemand freiwillig in den Kampf.

(Petrarca, *De spe vincendi – Von der Hoffnung auf Sieg*, 1366)

Beginnen wir also mit dem einfachsten Typ von Spielen, nämlich mit Zweipersonen–Nullsummenspielen. Und da definieren wir am besten zuerst einmal alle Begriffe, die wir brauchen, und zwar richtig.

2.1 Definition des Spiels

Bei der Begriffsbildung folgen wir im wesentlichen den beiden Standardwerken [17] und [26], bei denen wir uns hier auch am reichlichsten bedienen werden[1]. Die grundlegenden Konzepte wurden bereits 1928 von John von Neumann[2] [25] in der anscheinend ersten und immer noch lesenswerten Arbeit zum Thema Spieltheorie angegeben.

Definition 2.1.1. Ein *n–Personen–Spiel* $\mathscr{S}$, $n \in \mathbb{N}$, besteht aus n *Strategiemengen* $S_1, \dots, S_n$ und einer *Auszahlungsfunktion* $\boldsymbol{a} \; : \; S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}^n$, die den Gewinn der einzelnen Spieler bei Verwendung der jeweiligen Strategien angibt.

1. Das Spiel $\mathscr{S}$ heißt *Zweipersonenspiel*, wenn $n = 2$ ist[3].
2. Das Spiel $\mathscr{S}$ heißt *Nullsummenspiel*, wenn sich alle Auszahlungen zu 0 summieren:

$$0 \equiv \mathbf{1}^T \boldsymbol{a} := \sum_{j=1}^{n} a_j,$$

beziehungsweise

$$0 = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(s_1, \dots, s_n\right), \qquad s_j \in S_j, \; j = 1, \dots, n.$$

3. Sind die Strategiemengen S_j endlich, ist also $s_j := \# S_j < \infty$, $j = 1, \dots, n$, dann setzen wir $S_j = \left\{1, \dots, s_j\right\}$, $\sigma = (s_1, \dots, s_n)$, und erhalten die *Auszahlungsmatrizen*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \left[\boldsymbol{A}_j \; : \; j = 1, \dots, n\right] \\ &= \left[A_{j,\alpha} = a_j \left(\alpha_1, \dots, \alpha_n\right) \; : \; j = 1, \dots, n, \; \alpha \in \mathbb{N}^n, \; \alpha \le \sigma\right], \end{aligned}$$

[1] Es sind auch die mathematisch substantiellsten unter den Büchern. Es gibt zur Spieltheorie zwar relativ viel populärwissenschaftliche Literatur, aber die ist dafür auch gerne mal ungenau, wenn es um die „harten“ mathematischen Details geht.

[2] Der auch der Vater des *von Neumannschen Universalrechners* ist, einer erstaunlich genauen Beschreibung des Digitalcomputers noch bevor solche Geräte realisiert werden konnten.

[3] Das sollte niemanden so wirklich überraschen.

wobei

$$\alpha \le \beta \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha_j \le \beta_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

die Standard–Halbordnung für *Multiindizes* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ ist.

4. Im Fall eines Zweipersonen–Nullsummenspiels mit endlicher Strategiemenge ist das Spiel durch eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{s_1 \times s_2}$ beschrieben, für die $A_1 = A$ und $A_2 = -A$ gilt.

Beispiel 2.1.2. Wie wir schon in Beispiel 1.1.1 gesehen haben, ist die Spielmatrix zu *Stein, Schere, Papier* von der Form

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

und hat die schöne Eigenschaft, daß alle Zeilensummen und alle Spaltensummen den Wert 0 haben, also daß $\mathbf{1}^T A = A\mathbf{1} = 0$ ist. Außerdem ist A *schiefsymmetrisch*[4], also $A^T = -A$; das drückt die Tatsache aus, daß die Strategien, die ja beiden Spielern unabhängig voneinander zur Verfügung stehen, auch für beide Spieler gleichwertig sind, was eine weitere Symmetrieeigenschaft des Spiels ist.

Der Formalismus aus Definition 2.1.1 reicht zwar aus, um *Stein, Schere, Papier* zu beschreiben, aber bei eher klassischen Gesellschaftsspielen, selbst bei Schach, erscheint das ein wenig schwach. Einen Ausweg findet man aber bereits in [26], wo ein Spiel aus Spielzügen unterschiedlicher Art aufgebaut werden kann.

Definition 2.1.3 (Spielzüge und Information). Ein n–Personen–Spiel bestehe aus einer Abfolge von Zügen $M_0, M_1, \dots$ nach den folgenden Regeln:

1. Im k–ten Zug M_k kann Spieler n_k entweder eine bewusste, rein von ihm abhängige Entscheidung treffen, einen *Spielzug erster Ordnung* durchführen, oder eine zufällige, von ihm nicht beeinflußbare Handlung abrufen, was man als *Spielzug zweiter Ordnung* bezeichnet.

2. Nach diesem Zug entsteht eine neue Spielsituation, die entweder einen neuen Spieler n_{k+1} festlegt, oder das Spiel ist beendet und die Auszahlungen werden bestimmt.

3. Die *Information* $I_k \subset \{1, \dots, k-1\}$, die Spieler n_k vor Spielzug k zur Verfügung steht, beschreibt, welche Ergebnisse der Spielzüge M_j, $j \in I_k$, dem Spieler zur Verfügung stehen.

4. Das Spiel $\mathscr{S}$ beitzt *vollständige Information*, wenn $I_k = \{1, \dots, k-1\}$ für alle k und alle möglichen gewählten Spielzüge.

5. Das Spiel $\mathscr{S}$ heißt *endlich*, wenn jeder Spieler zu jedem Zeitpunkt nur endlich viele Strategien zur Auswahl hat und wenn es eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß das Spiel, unabhängig vom Ablauf, nach maximal N Zügen beendet ist.

Das ist alles ein wenig abstrakt, weswegen man sich das Konzept an einem klassischen Beispiel verdeutlichen sollte.

Beispiel 2.1.4 (Draw Poker). Die Unterscheidung zwischen Spielzügen erster und zweiter Art sieht man gut am Beispiel der klassischen Pokervariante *Draw Poker*. Eine Pokerpartie mit n Spielern läuft folgendermaßen ab:

[4] Auf Englisch *skew symmetric*.

1. Jeder Spieler zahlt einen Festbetrag in den Topf ein, was man nicht als Spielzüge verbuchen muss.

2. Jeder Spieler erhält fünf Karten aus einem gemischten Blatt, was wir als Spielzüge zweiter Art $M_1, \dots, M_n$ verbuchen können.

3. Nun kommt eine Bieterunde, die wir als eine Serie $M_{n+1}, \dots, M_m$ von Zügen erster Art beschreiben können – hierbei kann jeder Spieler erhöhen, dabeibleiben oder passen; die Information, die Spieler n_k beim k–ten Zug zur Verfügung steht, sind die Gebote seiner Vorgänger, und damit ist

$$I_k = \{n_k, m, \dots, k-1\},$$

also eben die eigenen Karten und alle bereits gemachten Gebote.

4. Im nächsten Schritt kann jeder Spieler bis zu drei Karten austauschen, das sind Züge $M_{m+1}, \dots, M_{m+n}$ erster Art, von denen auch alle Spieler informiert werden, denn jeder weiß, *wie viele* Karten der andere gezogen hat.

5. Das Aufnehmen und Ansehen der getauschten Karten sind dann separate Züge $M_{m+n+1}, \dots, M_{m+2n}$ zweiter Art, von deren Ergebnis nur der jeweils aktive Spieler informiert wird – keiner darf ja dem anderen in die Karten sehen.

6. Schließlich erfolgt eine zweite Bieterunde, an deren Ende alle Spieler, die noch nicht gepasst haben, ihre Karten vergleichen.

7. Am Ende wird die Gesamtsumme aller Einzahlungen an denjenigen Spieler ausgeschüttet, der nicht gepasst hat und das beste Blatt hat.

Ein Spiel, das auf Zügen, seien es Züge erster oder zweiter Art, beruht, kann man immer als einen *Baum* darstellen, bei dem alle Möglichkeiten für M_1 an der Wurzel aufgelistet werden und dann, in Abhängigkeit von den vorhergehenden Zügen, alle regelkonformen Möglichkeiten für M_2, M_3 und so weiter, siehe Abb. 2.1.1. Und nun ist klar, wie derartige

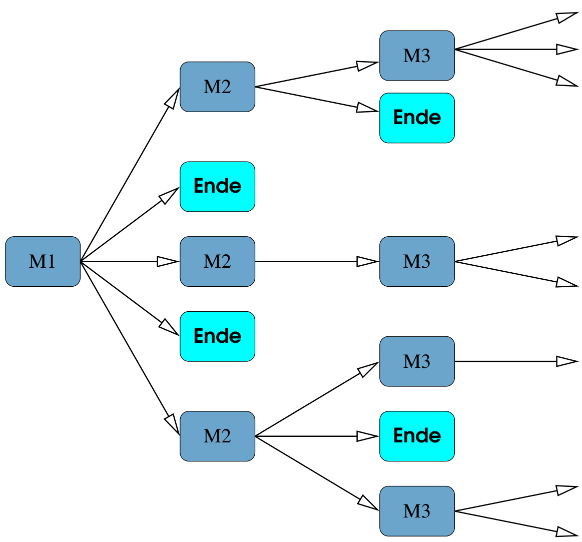

Abbildung 2.1.1: Ein Beispiel für die ersten drei Züge in einem *Spielbaum*. Wann immer das Ende des Spiels erreicht wird, erfolgt eine Auszahlung.

Spiele in die Normalform aus Definition 2.1.1 gebracht werden können: Jedes *Blatt*[5] des Baums entspricht einer Auszahlung die mit den Wahrscheinlichkeiten der Züge zweiter Art auf dem Weg dahin gewichtet wird, und die zugehörigen Strategien sind die entsprechenden Züge erster Art.

Man kann das auch sehr formal definieren und den Übergang von Spielbäumen zu Auszahlungsmatrizen exakt beschreiben, wie es in [26, Chapter II, S. 46–84] auch geschehen ist, aber das würde uns ein wenig zu lange aufhalten und der einzige Preis, den wir für diese „Schlampigkeit" zu zahlen haben werden, besteht darin, daß wir beim Beweis von Satz 2.2.4 nicht formal ganz vollständig und korrekt argumentieren können. Aber das lässt sich verschmerzen.

Bemerkung 2.1.5. Diese Sichtweise auf ein Spiel ist weniger abwegig, als es zuerst einmal erscheinen mag: Gerade beim Schach wählt man oft ganze Zugkombinationen als Strategien, beispielsweise bei den Eröffnungen (Spanisch, Königsindisch etc.).

Zum Abschluss wollen wir dieses Konzept noch anhand eines weiteren Bei–Spiels aus [34] illustrieren[6].

Beispiel 2.1.6 (Russisch Roulette). Um das klassische *Russisch Roulette* (ein Trommelrevolver mit sechs Patronen, von denen nur eine scharf ist, die anderen fünf sind blind[7]) etwas interessanter zu machen spielen A und B es mit zusätzlichem Einsatz. Das Spiel läuft folgendermaßen ab:

1. Jeder Spieler setzt eine Gewinneinheit[8].
2. Spieler A kann nun entweder zwei weitere Einheiten setzen und den Revolver an B weitergeben („Passen") oder eine Einheit setzen, den Revolver an seine Schläfe halten und abdrücken.
3. Hat Spieler A seinen Zug überlebt, dann hat Spieler B dieselben Optionen, darf aber die Trommel nicht verändern.
4. Das Spiel ist beendet und die überlebenden Spieler teilen die Einsätze untereinander auf.

Der Spielbaum zu Beispiel 2.1.6 findet sich in Abb. 2.1.2, man sieht, daß es sich offenbar um ein Nullsummenspiel handelt. Spieler A hat zwei Strategien, Passen (P) und Spielen (S), wohingegen Spieler B vier Strategien hat: Auf jeden Fall Spielen (S), auf jeden Fall Passen (P), dieselbe Strategie wie A (A) oder die entgegengesetzte Strategie (E).

Sehen wir uns ein Bei-Spiel an. Wenn Spieler 1 sich für (S) entscheidet, dann geht mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ der Revolver los und er verliert 2 Einheiten[9], also eine erwartete Auszahlung[10] von $-\frac{1}{3}$. Andernfalls hängt der Spielverlauf von Spieler 2 ab. Entscheidet

[5] Also jeder Knoten, der keinen Nachfolgeknoten hat, in unserem Fall genau dann, wenn das Spiel endet. Das hat jetzt *nichts* mit Poker zu tun.

[6] Dieses Spiel ist zur Nachahmung **nicht** empfohlen! Insbesondere nicht für Kinder.

[7] Von der Verwendung von Platzpatronen anstelle von blinden Patronen sei hier ausdrücklich abgeraten.

[8] Im Originaltext von [34] geht es um Zigarettenpäckchen, so daß den Spielern also die Wahl zwischen schnellem und langsamem Tod bleibt.

[9] Eine vom Anfang und die eine, die er wegen der Wahl „spielen" einlegen musste; da danach nur Spieler 2 übrig ist, bekommt dieser alle 4 Gewinneinheiten, die im Topf sind.

[10] Noch einmal: Wir zählen hier nur die Einheiten!

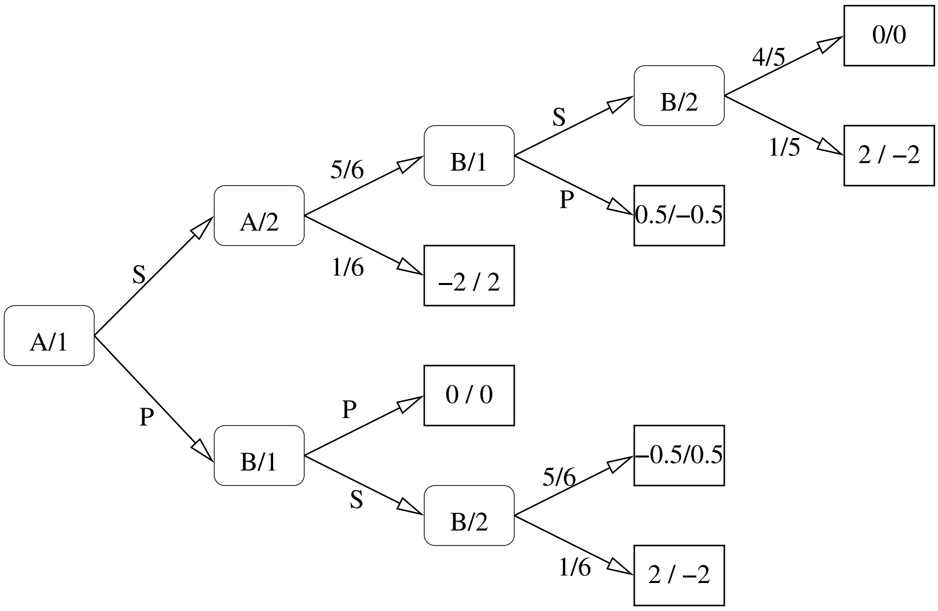

Abbildung 2.1.2: Der Ablauf des *Russisch Roulette* aus Beispiel 2.1.6. Bei den Zügen ist angegeben, welcher Spieler am Zug ist, und ob es ein Zug erster oder zweiter Art ist, bei den Ergebnissen die Auszahlung.

sich der für (P) so sind 5 Einheiten im Topf, zwei von Spieler 1, drei von Spieler 2 und da beide überlebt haben, teilen sie sich das Ganze, so daß jeder $2\frac{1}{2}$ Einheiten erhält und daher Spieler 1 eine halbe Einheit gewinnt, die Spieler 2 verliert. Die erwartete Auszahlung von (S)/(P), und damit auch (S)/(E), ist also

$$\frac{1}{6}(-2) + \frac{5}{6}\frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

Entscheidet sich Spieler 2 hingegen für (S) so ist mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$ die Auszahlung 2, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{5}$ hingegen ist sie 0. Insgesamt haben wir es bei (S)/(S) also mit

$$\frac{1}{6}(-2) + \frac{5}{6}\left(\frac{1}{5}2 + \frac{4}{5}0\right) = 0$$

zu tun. Die untere Hälfte des Baumes liefert ganz enstprechend $-\frac{1}{12}$ und 0 für (P)/(S) und (P)/(P), wir erhalten also die folgende Auszahlungstabelle

	S	P	A	E
S	0	1/12	0	1/12
P	−1/12	0	0	−1/12

oder, als Matrix geschrieben,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & 0 & 0 & -\frac{1}{12} \end{bmatrix}. \tag{2.1.1}$$

Das Spiel ist erstaunlich fair und symmetrisch und die optimale Strategie besteht für beide Spieler darin, zu spielen – der Erwartungswert[11] ist dann 0.

[11]Das entspricht der Anschauung: Was hat man bei diesem Spiel schon zu gewinnen?

Übung 2.1.1 Bestimmen Sie die Auszahlungsmatrix für den Fall, daß Spieler B die Revolvertrommel nochmals drehen darf. Ist das Spiel dann immer noch fair? ◇

Die Matrix A in (2.1.1) hat noch eine weitere interessante Eigenschaft, die das Finden der Optimalstrategie erleichtert: Jeder Eintrag in der ersten Zeile dominiert den zugehörigen Eintrag der zweiten Zeile, also $a_{1k} \geq a_{2k}$, $k = 1, 2, 3, 4$. Damit gibt es aber für A gar keinen rationalen Grund, jemals zu passen, denn was auch immer B tun wird, er fährt immer schlechter.

Definition 2.1.7 (Dominanz von Zeilen und Spalten). Wir sagen die Zeile j der Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *dominiert* die Zeile $j' \neq j$, wenn

$$a_{jk} \geq a_{j'k}, \qquad k = 1, \dots, n.$$

Analog definiert sich die Dominanz von Spalten. Eine Strategie j für S_1 heißt *redundant*, wenn die Zeile j von einer anderen Zeile j' dominiert wird, und entsprechend auch für Strategien von S_2, also für Spalten der Matrix $\boldsymbol{A}$.

Redundante Strategien können wir getrost entfernen ohne das Spiel relevant zu verändern, da kein rationaler Spieler sie jemals spielen wird. Tun wir das mit der Matrix aus (2.1.1), dann wird zuerst die Strategie „P“ von Spieler A redundant und dann die beiden Strategien „P“ und „E“ von Spieler B, der also nur noch spielen oder genauso handeln wird wie A, was, nachdem A ja immer spielt, dasselbe ist. Mit anderen Worten:

Die optimale Strategie für beide Spieler besteht darin, zu spielen, nicht zu passen.

Beispiel 2.1.8 (Stein, Schere, Papier, Brunnen). In der Spielpraxis wird *Stein, Schere, Papier*[12] oftmals noch um die Option *Brunnen* erweitert, wobei der Brunnen Stein und Schere besiegt (beide fallen hinein), aber gegen das Papier verliert, das ihn abdeckt; die Spielmatrix ist somit

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nun dominiert aber die letzte Zeile dieser Matrix, also die Strategie „Brunnen“, die erste Zeile, die zum „Stein“ gehört und somit gibt es für S_1 keine Veranlassung, jemals „Stein“ zu spielen – er würde mit „Brunnen“ ja immer besser abschneiden. Entfernt man die erste Zeile, dann sieht man aber auch, daß die erste Spalte (also wieder der Stein) jetzt die letzte Spalte dominiert, daß also auch Spieler 2, der die Auszahlung ja *minimieren* will, vom Stein besser die Finger lässt. Somit erhält man durch die Streichungen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

womit „Schere, Papier, Brunnen“ übrigbleibt, was genau dieselbe Auszahlungsmatrix wie *Stein, Schere, Papier* hat. Der Brunnen bringt dem Spiel also absolut nichts, einmal abgesehen davon, daß man sich dumm anstellen und falsche Strategien benutzen kann, nämlich solche, die „Stein“ enthalten.

[12] Gerne auch unter dem reichlich bescheuerten Namen „Schnick, Schnack, Schnuck“.

2.2 Die Optimallösung, reine und gemischte Strategien

Bisher haben wir schon einige Spiele kennengelernt, in unseren Formalismus transformiert und zum Teil auch die optimalen Strategien mit ad–hoc–Methoden bestimmt, von einer wirklichen Spiel*theorie* sind wir aber immer noch weit entfernt!

Sei also jetzt ein Zweipersonen–Nullsummenspiel durch eine Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gegeben, wobei die Auszahlung für S_2 wieder durch $-\boldsymbol{A}$ beschrieben wird. Nun beziehen wir wieder den pessimistischen Standpunkt aus Sicht von S_1 und fragen uns, welche Mindestauszahlung wir im Spiel auf jeden Fall erreichen können. Würde S_2 für Strategie j von S_1 die *optimale* Gegenstrategie spielen, dann beträgt die Auszahlung für diese Strategie

$$v_{1j} := \min_{k=1,\dots,n} a_{jk}, \qquad j = 1, \dots, m, \tag{2.2.1}$$

und der garantierte Mindestgewinn von S_1 beträgt

$$v_1 := \max_{j=1,\dots,m} v_{1j} = \max_{j=1,\dots,m} \min_{k=1,\dots,n} a_{jk}. \tag{2.2.2}$$

Das ist nach all unseren Vorbemerkungen genausowenig neu oder überraschend wie die Tatsache, daß sich die unvermeidbare Maximalauszahlung, die Spieler 2 leisten muss, als

$$v_2 := \min_{k=1,\dots,n} \max_{j=1,\dots,m} a_{jk} \tag{2.2.3}$$

ergibt. Unter Verwendung von Lemma 1.3.2 können wir das in die Ungleichung

$$v_1 \le v_2 \tag{2.2.4}$$

stecken – der garantierte Mindestgewinn ist kleiner als die unvermeidbare Maximalauszahlung. Und wenn Gleichheit gilt, dann ist das Spiel gelaufen.

Satz 2.2.1 (Reine Strategien). *Ist* $v_1 = v_2 =: v$*, dann gibt es* optimale reine *Strategien* $j^* \in \{1, \dots, m\}$ *und* $k^* \in \{1, \dots, n\}$*, so daß*

$$v = a_{j^*k^*} \qquad \textit{und} \qquad a_{jk^*} \le a_{j^*k^*} \le a_{j^*k}, \quad j = 1, \dots, m, \ k = 1, \dots, n. \tag{2.2.5}$$

Definition 2.2.2. Das Paar j^*, k^* bezeichnet man – sofern es existiert – als *Sattelpunkt* des Nullsummenspiels mit Auszahlungsmatrix $\boldsymbol{A}$.

Bemerkung 2.2.3 (Optimalität).

1. Der Begriff der „Optimalität“ von reinen Strategien ist jetzt klar und immer in einem konservativen, vorsichtigen oder pessimistischen[13] Sinn zu verstehen: Beharrt S_1 auf seiner Optimalstrategie j^*, dann tut S_2 gut daran, auch seine Optimalstrategie k^* zu wählen, denn eine andere Strategie birgt zwar vielleicht Chancen, auf alle Fälle aber auch das Risiko eines geringeren Gewinns, zumindest, wenn in (2.2.5) auch ein paar strikte Ungleichungen auftreten[14].

2. Ein Spiel besitzt also genau dann einen Sattelpunkt, wenn $v_1 = v_2$ ist. Glücklicherweise erfüllen die meisten interessanten Spiele die strikte Ungleichung $v_1 < v_2$, um nur das Beispiel *Stein, Schere, Papier* zu nennen.

[13] Damit will ich aber auf keinen Fall behaupten, die drei Adjektive wären Synonyme! Ganz im Gegenteil: Es sind unterschiedliche Arten, diese Form von Optimalität zu bewerten, so daß hoffentlich für jeden subjektiven Geschmack ein passendes Adjektiv dabei ist.

[14] Das muß nicht sein, wie das todlangweilige Spiel auf der Basis von $\boldsymbol{A} = 0$ zeigt.

Beweis von Satz 2.2.1: Wähle j^* und k^* so, daß

$$v_1 = v_{1j^*} = \max_{j=1,\dots,m} v_{1j} \qquad \text{und} \qquad v_2 = v_{2k^*} = \min_{k=1,\dots,n} v_{2k}$$

ist. Mit $v_1 = v_2 = v$ ist also

$$a_{j^*k^*} \ge \min_{k=1,\dots,n} a_{j^*k} = v_{1j^*} = v = v_{2k^*} = \max_{j=1,\dots,m} a_{jk^*} \ge a_{j^*k^*}$$

und daher muß überall Gleicheit gelten, so daß

$$v = a_{j^*k^*} = \min_{k=1,\dots,n} a_{j^*k} = \max_{j=1,\dots,m} a_{jk^*}$$

ist, woraus (2.2.5) unmittelbar folgt. □

Obwohl sie für vorsichtige Spieler aufgrund ihrer Determiniertheit eher langweilig sind, sind Spiele mit reinen Strategien durchaus nicht ungebräuchlich und auch keine Seltenheit. Die folgende Aussage wurde so auch bereits in [26] bewiesen[15].

Satz 2.2.4. *Jedes endliche Spiel mit vollständiger Information besitzt einen Sattelpunkt.*

Korollar 2.2.5 (Siehe [26, 15.7]). *Sobald es richtig verstanden ist, ist Schach langweilig.*

Beweis von Satz 2.2.4: Wir erinnern uns an das Konzept der Züge erster und zweiter Ordnung aus Definition 2.1.3. Bei einem Zweipersonenspiel können wir immer annehmen, daß S_1 die Züge $2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, und S_2 die Züge $2k$, $k \in \mathbb{N}$, ausführt; sollten die Spielregeln Mehrfachzüge zulassen[16], dann fassen wir diese einfach zu einem Zug zusammen. Schließlich stellen wir wie in Abb. 2.1.1 alle möglichen Spiele in einem nach Voraussetzung endlichen Baum zusammen, der eine Maximallänge N besitzt und beweisen den Satz durch Induktion über N.

Der Fall $N = 1$ ist dabei trivial: Hier entscheidet nur S_1 und der wählt einfach die Strategie, die ihm genehm ist; die Auszahlungsmatrix eines solchen Spiels ist ja nur ein Zeilenvektor.

Um von $N \to N+1$ zu kommen, betrachten wir nun einen Baum der Maximallänge $N+1$. Durch den ersten Zug von S_1 zerfällt der Baum in eine endliche Anzahl von Teilbäumen, die wir als Spiele $\mathscr{S}_1, \dots, \mathscr{S}_M$ mit Strategiemengen $\sigma_1(\ell), \sigma_2(\ell) \subset \mathbb{N}$ und Auszahlungsmatrizen

$$\boldsymbol{A}_\ell = \left[a_{jk}^\ell \;:\; j \in \sigma_1(\ell),\; k \in \sigma_2(\ell) \right]$$

ansehen können[17]. Da unser Spiel $\mathscr{S}$ über vollständige Information verfügt, überträgt sich das natürlich auf die Spiele $\mathscr{S}_\ell$, insbesondere ist beiden Spielern zu Beginn von $\mathscr{S}_\ell$ für jedes $\ell \in \{1, \dots, M\}$ die gesamte Spielsituation bekannt, und da die zugehörigen Spielbäume nun nur noch Länge N haben, existiert für jedes dieser Spiele $\mathscr{S}_\ell$ ein Strategiepaar $j_\ell^*, k_\ell^* \in \sigma_1(\ell) \times \sigma_2(\ell)$, so daß

$$v^\ell = \max_{j\in\sigma_1(\ell)} \min_{k\in\sigma_2(\ell)} a_{jk}^\ell = \min_{k\in\sigma_2(\ell)} \max_{j\in\sigma_2(\ell)} a_{jk}^\ell = a_{j_\ell^* k_\ell^*}^\ell.$$

[15] Und wird in [34] auch respektvoll erwähnt, als Beispiel was „richtige“ Mathematiker so alles zustandebringen.

[16] Wie beispielsweise bei Dame oder Mühle. Oder man spielt *Bigamie*: zwei simultane Damespiele auf einem Brett, eines auf den weißen, eines auf den schwarzen Feldern!

[17] Was in [26] sehr schön erklärt wird: Der erste Zug ℓ des Spiels $\mathscr{S}$ wird Bestandteil der Spielregeln von $\mathscr{S}_\ell$.

Somit ist

$$v := \max_{\ell=1,\dots,M} \max_{j\in\sigma_1(\ell)} \min_{k\in\sigma_2(\ell)} a_{jk}^{\ell} = \max_{\ell=1,\dots,M} \min_{k\in\sigma_2(\ell)} \max_{j\in\sigma_1(\ell)} a_{jk}^{\ell}.$$

Die Strategie, die sich für S_1 aufdrängt, besteht daher darin, im ersten Zug ℓ^* mit

$$v^{\ell^*} = \max_{\ell=1,\dots,M} v^{\ell}$$

und dann[18] $j^*_{\ell^*}$ zu spielen — diese Strategie bezeichnen wir mit j^*. Durch diesen ersten Zug bleiben aber für S_2 nur die Strategien aus $\sigma_2(\ell^*)$ übrig, und für die ist

$$\min_{k\in\sigma_2(\ell^*)} \max_{\ell=1,\dots,M} \max_{j\in\sigma_1(\ell)} a_{jk}^{\ell} = \max_{\ell=1,\dots,M} \min_{k\in\sigma_2(\ell^*)} \max_{j\in\sigma_1(\ell)} a_{jk}^{\ell} = a_{j^*_\ell k^*_\ell}^{\ell^*} = v,$$

womit auch $\mathscr{S}$ einen Sattelpunkt hat.

Einen Fall haben wir hier unterschlagen: Daß M_1, ganz egal für welchen Spieler, ein Zug zweiter Art, also rein zufällig ist. Aber da das auch nur gewichtete Kombinationen der jeweiligen Auszahlungen liefert, arbeitet man dann einfach mit dem gewichteten Mittel der jeweiligen Teilspiele. $\square$

Es gibt also eine ganze, alles andere als triviale, Klasse von Spielen, die einen Sattelpunkt besitzen und so durch einfache reine Strategien determiniert sind. Trotzdem können wir bei weitem nicht alle Spiele auf diese Weise beschreiben, wobei wieder einmal *Stein, Schere, Papier* als Standardbeispiel fungiert. In solchen Fällen nehmen wir dann Zuflucht zu den *gemischten Strategien.*

Definition 2.2.6. Sei $\mathscr{S}$ ein Zweipersonen–Nullsummenspiel mit Auszahlungsmatrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Eine *gemischte Strategie* für Spieler 1 ist ein Wahrscheinlichkeitsvektor $\boldsymbol{p} \in \mathbb{S}_m$, eine gemischte Strategie für Spieler 2 entsprechend $\boldsymbol{q} \in \mathbb{S}_n$. Dabei ist

$$\mathbb{S}_k := \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \ : \ x_j \ge 0,\, x_1 + \cdots + x_k = 1 \right\}.$$

Bei gemischten Strategien interessiert man sich dann natürlich für die *erwartete* Auszahlung; unter der omnipräsenten Annahme, daß die Wahrscheinlichkeiten $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{q}$ unabhängig voneinander gewählt sind[19], tritt das Strategiepaar (j,k) und damit die Auszahlung a_{jk} mit Wahrscheinlichkeit $p_j q_k$ auf, so daß die erwartete Auszahlung die bilineare Funktion

$$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \mapsto E(\boldsymbol{A},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} p_j q_k = \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{q}$$

ist.

Definition 2.2.7. Ein Spiel heißt *symmetrisch*, wenn die Rollen der beiden Spieler vertauschbar sind, wenn also[20]

$$E(\boldsymbol{A},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = -E(\boldsymbol{A},\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$$

ist, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T$ gilt, wenn also die Matrix $\boldsymbol{A}$ *schiefsymmetrisch* ist.

[18]Die Zwei–Sterne–Strategie …

[19]Daß die Strategiewahl unabhängig und a priori erfolgt, das haben wir ja sogar für die Baumstruktur von Spielzügen gesehen, beispielsweise beim *Russisch Roulette.*

[20]Achtung: Vertauschung der Spieler führt zum umgekehrten Vorzeichen bei der (erwarteten) Auszahlung!

Der Begriff der optimalen Strategie ist nun ganz analog zum diskreten Fall. Wieder wird S_1 versuchen, seine *optimale Strategie* $\boldsymbol{p}^*$ so zu wählen, daß der erwartete garantierte Gewinn

$$v_1 = \max_{\boldsymbol{p}\in\mathbb{S}_m} \min_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{S}_n} E\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\right)$$

erreicht wird, wohingegen Spieler 2 sein $\boldsymbol{q}^*$ so wählt, daß

$$v_2 = \min_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{S}_n} \max_{\boldsymbol{p}\in\mathbb{S}_m} E\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\right)$$

die zu erwartende Maximalauszahlung so klein wie möglich macht. Nur geschieht jetzt beim Übergang zu den gemischten Strategien ein kleines „Wunder“, das sich mathematisch dadurch erklären lässt, daß die diskrete Funktion $(j,k) \to a_{jk}$ im Prinzip beliebig unstrukturiert sein kann, die *Bilinearform* $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \to \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}$ hingegen eine Funktion mit sehr viel Struktur und schönen Eigenschaften ist. Und genau das führt zum *Minimax–Theorem*, das wir uns im nächsten Abschnitt ansehen wollen.

2.3 Das Minimax–Theorem

Und schon sind wir beim Hauptsatz der Spieltheorie, der zuerst in [25] formuliert und bewiesen wurde.

Satz 2.3.1 (Minimax–Theorem). *Für jede Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gibt es eine Zahl $v \in \mathbb{R}$, so daß*

$$v = \max_{\boldsymbol{p}\in\mathbb{S}_m} \min_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{S}_n} \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{q} = \min_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{S}_n} \max_{\boldsymbol{p}\in\mathbb{S}_m} \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}. \tag{2.3.1}$$

Definition 2.3.2. Die Zahl v aus (2.3.1) heißt *Wert* des Spieles und man nennt ein Spiel *fair*, wenn $v = 0$ ist.

Beispiel 2.3.3 (*Skin Game* aus [9, S. 121–124]). Die Kunst beim Design von Spielen besteht darin, die Auszahlung so zu wählen, daß das Spiel zwar fair erscheint, es aber nicht ist. Ein schönes Beispiel ist das *Skin Game*, bei dem beide Spieler ein As (Wert 1) und eine Zwei (Wert 2) der Farben Karo und Kreuz erhalten, außerdem hat S_1, der „Carnival Man“, der dieses Spiel anderen anbietet, die Karo–2 und sein Gegenspieler die Kreuz–2. Die Regel ist einfach: Bei gleicher Farbe gewinnt S_1, bei unterschiedlichen Farben S_2, die beiden Zweien werden als Unentschieden gewertet. Der Auszahlungsbetrag ist der Wert der Karte die der Sieger gespielt hat, was zur folgenden Auszahlungsmatrix aus Sicht von S_1 führt:

	$\diamond A$	$\clubsuit A$	$\clubsuit 2$
$\diamond A$	1	−1	−2
$\clubsuit A$	−1	1	1
$\diamond 2$	2	−1	0

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Das sieht doch eigentlich alles sehr fair und symmetrisch aus, aber ist es das auch? Wir werden sehen!

Übung 2.3.1 Ist das *Skin Game* aus Beispiel 2.3.3 fair? Bestimmen Sie den Wert des Spiels! *Hinweis:* Suchen Sie nach Dominanzen. ◇

Korollar 2.3.4. *Die erwartete Mindestauszahlung für S_1 bei optimaler Spielweise beträgt v, die für S_2 beträgt $-v$.*

Korollar 2.3.5. *Symmetrische Spiele sind fair: Ist A schiefsymmetrisch, dann ist $v = 0$.*

Beweis: Mit $A^T = -A$, also insbesondere $m = n$ folgt, daß

$$p^T A q = q^T A^T p = -q^T A p,$$

und daher ist

$$\begin{aligned} v &= \max_{p \in \mathbb{S}_m} \min_{q \in \mathbb{S}_m} p^T A q = \max_{p \in \mathbb{S}_m} \min_{q \in \mathbb{S}_m} -q^T A p = \max_{p \in \mathbb{S}_m} \left(- \max_{q \in \mathbb{S}_m} q^T A p \right) \\ &= - \min_{p \in \mathbb{S}_m} \max_{q \in \mathbb{S}_m} q^T A p = - \min_{q \in \mathbb{S}_n} \max_{p \in \mathbb{S}_m} p^T A q = -v, \end{aligned}$$

also $v = 0$. □

Der Beweis von Satz 2.3.1 ist dann schon ein bißchen aufwendig und folgt hier der Darstellung aus [26], was aber **nicht** die Originalversion aus [25] ist. Tatsächlich gibt es mehrere andere Beweise, bespielsweise auf der Basis von Fixpunktsätzen. Der Einfachheit halber verwenden wir jetzt die *erwartete Auszahlungsfunktion*

$$a(p, q) = p^T A q. \tag{2.3.2}$$

Die erste Beobachtung sagt uns, daß wir für die Bestimmung extremaler Strategien nur Eckpunkte des Simplex betrachten müssen.

Lemma 2.3.6. *Für $p \in \mathbb{S}_m$ und $q \in \mathbb{S}_n$ gilt*

$$\min_{q' \in \mathbb{S}_n} a(p, q') = \min_{k=1,\dots,n} \sum_{j=1}^m a_{jk} p_j = \min_{k=1,\dots,n} \left(p^T A \right)_k \tag{2.3.3}$$

und

$$\max_{p' \in \mathbb{S}_m} a(p', q) = \max_{j=1,\dots,m} \sum_{k=1}^n a_{jk} q_k = \max_{j=1,\dots,m} (A q)_j. \tag{2.3.4}$$

Beweis: Für beliebige k Strategien $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{S}_n$, $k \in \mathbb{N}$, sowie $\alpha \in \mathbb{S}_k$ und $p \in \mathbb{S}_m$ ist

$$a\left(p, \sum_{\ell=1}^k \alpha_\ell q_\ell \right) = \sum_{\ell=1}^k p^T A (\alpha_\ell q_\ell) = \sum_{\ell=1}^k \alpha_\ell a(p, q_\ell). \tag{2.3.5}$$

Für die Einheitsvektoren $e_j \in \mathbb{S}_n$, $j = 1, \dots, n$, ist $q = q_1 e_1 + \cdots + q_m e_m$ und daher

$$a(p, q) = \sum_{j=1}^m q_j a(p, e_j) \ge \underbrace{\sum_{j=1}^m q_j}_{=1} \min_{k=1,\dots,n} a(p, e_k) = \min_{k=1,\dots,n} \left(p^T A \right)_k.$$

Da die rechte Seite unabhängig von q ist, gilt die Abschätzung auch für das Minimum und es ist

$$\min_{q \in \mathbb{S}_m} a(p, q) \ge \min_{k=1,\dots,n} \left(p^T A \right)_k = \min_{k=1,\dots,n} a(p, e_k) \ge \min_{q \in \mathbb{S}_m} a(p, q),$$

woraus (2.3.3) folgt. Der Beweis von (2.3.4) geht ganz analog[21]. □

[21] Eine Tatsache, die aber niemanden davon abhalten sollte, diesen Teil des Beweises trotzdem mal übungshalber durchzuspielen!

So, jetzt geht es an die *konvexe Analysis.* Dazu erinnern wir uns zuerst daran, daß eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ als *konvex* bezeichnet wird, wenn zusammen mit zwei Punkten ihre gesamte Verbindungsstrecke in Ω enthalten ist, das heißt,

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Omega \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha\, \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\, \boldsymbol{y} \in \Omega, \quad \alpha \in [0,1]. \tag{2.3.6}$$

Aus (2.3.6) folgt dann auch, daß für jede konvexe Menge

$$\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n \in \Omega \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^n q_j\, \boldsymbol{x}_j \in \Omega, \quad \boldsymbol{q} \in \mathbb{S}_n \quad \Leftrightarrow \quad [\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}]\, \mathbb{S}_n \subseteq \Omega$$

gilt, wobei $[\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}]$ die Matrix mit den Spaltenvektoren $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ bezeichnet.

Definition 2.3.7 (Konvexe Hülle & Hyperebene). Die *konvexe Hülle* der Punkte $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^m$ ist definiert als

$$[\![\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n]\!] := \operatorname{conv}\, (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) := [\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}]\ \mathbb{S}_n. \tag{2.3.7}$$

Eine *Hyperebene* $H \subset \mathbb{R}^m$ ist ein $m-1$–dimensionaler *affiner* Unterraum von $\mathbb{R}^m$, der als

$$H = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \ : \ \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{x} + c = 0 \right\}, \qquad \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \quad c \in \mathbb{R} \tag{2.3.8}$$

gegeben ist.

Der Grund, warum wir beide Begriffe in eine Definition gepackt haben, ist das folgende Resultat, das besagt, daß sich konvexe Mengen immer durch Hyperebenen begrenzen lassen.

Proposition 2.3.8 (Trennhyperebenensatz). *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen und konvex und $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \setminus \Omega$, dann gibt es $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}$, so daß*

$$\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{y} + c < 0 < \boldsymbol{y}^T \Omega + c := \left\{ \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{x} + c \ : \ x \in \Omega \right\}. \tag{2.3.9}$$

Mit anderen Worten: $\boldsymbol{y}$ und Ω liegen auf unterschiedlichen Seiten *von H bzw. in unterschiedlichen von H induzierten Halbräumen, die zu $\boldsymbol{v}$ und c gehörige Hyperebene ist also eine* Trennhyperebene[22] *für $\boldsymbol{y}$ und Ω.*

Beweis: Wir sammeln ein paar Beobachtungen über konvexe Mengen und Normen auf.

1. Die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ ist *strikt konvex*, d.h. für $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ und $0 < \alpha < 1$ ist, unter Verwendung der guten alten Cauchy–Schwarz–Ungleichung, siehe z.B. [7, S. 190–191] oder [15, S. 15]

$$\begin{aligned} \|\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{x}'\|_2^2 &= \sum_{j=1}^m \left[\alpha^2 x_j^2 + 2\alpha(1-\alpha) x_j\, x_j' + (1-\alpha)^2 {x_j'}^2 \right] \\ &\le \alpha^2\ \|\boldsymbol{x}\|_2^2 + (1-\alpha)^2\ \|\boldsymbol{x}'\|_2^2 + 2\alpha(1-\alpha) \sum_{j=1}^m \left| x_j\, x_j' \right| \\ &\le \alpha^2\ \|\boldsymbol{x}\|_2^2 + (1-\alpha)^2\ \|\boldsymbol{x}'\|_2^2 + 2\alpha(1-\alpha)\ \|\boldsymbol{x}\|_2\, \|\boldsymbol{x}'\|_2 \\ &= (\alpha\ \|\boldsymbol{x}\|_2 + (1-\alpha)\ \|\boldsymbol{x}'\|_2)^2, \end{aligned}$$

also

$$\|\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{x}'\|_2 \le \alpha\ \|\boldsymbol{x}\|_2 + (1-\alpha)\ \|\boldsymbol{x}'\|_2$$

mit Gleichheit dann und nur dann, wenn $\boldsymbol{x}$ ein Vielfaches von $\boldsymbol{x}'$ ist[23].

[22] Eine Hyperebene, die $\boldsymbol{y}$ und Ω voneinander trennt ...

[23] Auch das ist ein Bestandteil der Cauchy–Schwarz–Ungleichung.

2. Für $y \in \mathbb{R}^m \setminus \Omega$ gibt es *genau ein* $x^* \in \Omega$, so daß

$$\|y - x^*\|_2 < \|y - x\|_2 , \qquad x \in \Omega \setminus \{x^*\} .$$

Die Existenz eines $x \in \Omega$, so daß

$$\|y - x\|_2 = \min_{x' \in \Omega} \|y - x\|_2 \tag{2.3.10}$$

folgt aus der Abgeschlossenheit von Ω, der interessante Teil ist die Eindeutigkeit. Gäbe es aber zwei verschiedene Lösungen $x_1 \neq x_2$ von (2.3.10), dann setzen wir $x := \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \in \Omega$ und erhalten, daß

$$\begin{aligned} \|y - x\|_2 &= \left\| y - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \right\|_2 = \left\| \frac{1}{2}(y - x_1) + \frac{1}{2}(y - x_2) \right\|_2 \\ &< \frac{1}{2}\left(\|y - x_1\|_2 + \|y - x_2\|_2\right) = \min_{x' \in \Omega} \|y - x\|_2 , \end{aligned}$$

und das kann ja nun wirklich nicht sein.

3. Der *Bestapproximant* aus Teil 2 zeichnet sich dadurch aus, daß für alle $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} 0 &< \|y - x\|_2^2 - \|y - x^*\|_2^2 \\ &= \|y\|_2^2 - 2y^T x + \|x\|_2^2 - \|y\|_2^2 + 2y^T x^* - \|x^*\|_2^2 \\ &= \|x\|_2^2 - \|x^*\|_2^2 + 2y^T (x^* - x) = (x + x^*)^T (x - x^*) - 2y^T (x - x^*) \\ &= ((x - y) + (x^* - y))^T (x - x^*) . \end{aligned}$$

Da Ω konvex ist, gilt das auch, wenn wir x durch die Konvexkombination $\alpha x + (1 - \alpha)x^*$ ersetzen, $0 < \alpha < 1$, was dann

$$0 < (\alpha (x - y) + (2 - \alpha)(x^* - y))^T \alpha (x - x^*)$$

liefert. Dividieren wir diesen Ausdruck durch 2α und lassen dann $\alpha \to 0$ gehen, dann erhalten wir, daß

$$0 \leq (x^* - y)^T (x - x^*) , \qquad x \in \Omega, \tag{2.3.11}$$

sein muß. Diese Abschätzung bezeichnet man als *Kolmogoroff–Kriterium*[24] und sie *charakterisiert* sogar den Bestapproximanten, siehe z.B. [19], taucht aber auch ganz spezifisch in der Spieltheorie auf [26, 16.3, S. 134–138].

So, wenn man all diese elementaren Fakten zur Verfügung hat, dann ist der eigentlich Beweis einfach, siehe Abb. 2.3.1: Zu $y \in \mathbb{R}^m \setminus \Omega$ bestimmen wir den eindeutigen Bestapproximanten aus Ω und sehen uns die affine Funktion

$$a(x) = v^T x + c', \qquad v = (x^* - y) , \quad c' = -v^T x^*,$$

an, für die nach (2.3.11) die Ungleichungen

$$a(y) = -\|x^* - y\|_2^2 < 0 = a(x^*) \leq a(x), \qquad x \in \Omega,$$

gelten. Damit legen v und $c = c' - \frac{1}{2}a(y)$ die gesuchte Trennhyperebene fest. □

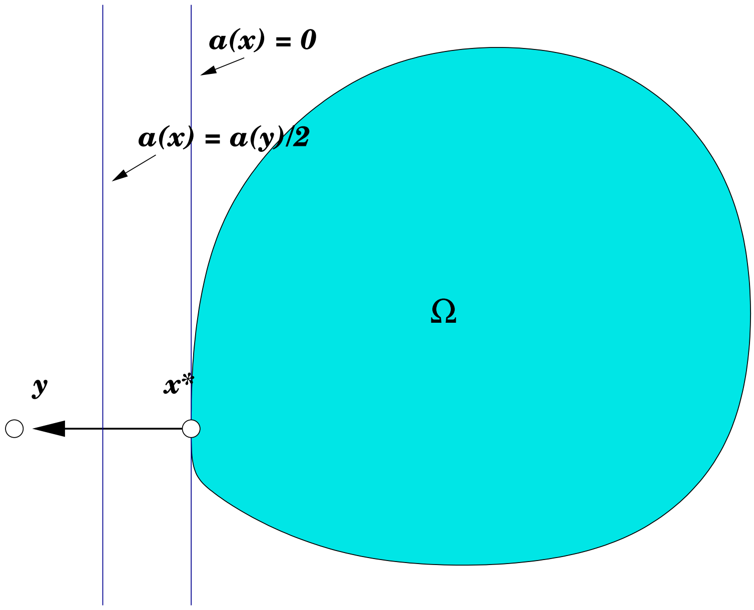

Abbildung 2.3.1: Konstruktion der Trennhyperebene: Zuerst findet man den Extremalpunkt, dann liefert (2.3.11) bereits, daß die durch x^* gehende Gerade, die senkrecht auf $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*$ steht, eine schwache Trennfunktion hat: Mindestens ein Punkt von Ω, nämlich $\boldsymbol{x}^*$ liegt noch auf dieser Hyperebene – aber der Punkt ist auch eindeutig, wenn die Menge Ω *strikt konvex* ist. Schieben wir sie nun ein bißchen in Richtung $\boldsymbol{y}$ – der Wert $\frac{1}{2}$ war hier total willkürlich – dann sind beide Ungleichungen der Trennung so strikt wie in (2.3.9) gefordert.

Schließlich noch eine Aussage über Matrizen, die auch im Kontext der Optimierung auftaucht[25], siehe z.B. [32].

Lemma 2.3.9 (Alternativensatz für Matrizen). *Zu jeder Matrix* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *gibt es entweder* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{S}_m$*, so daß*[26] $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} > 0$ *ist, oder ein* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{S}_n$*, so daß* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \leq 0$ *ist und diese beiden Möglichkeiten schließen einander aus.*

Beweis: Unter Verwendung der *Spaltenvektoren* $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ der Matrix $\boldsymbol{A}$, d.h. mit $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n]$, betrachten wir die abgeschlossene konvexe Menge

$$\Omega := [\![\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m]\!] = [\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{I}]\ \mathbb{S}_{m+n} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Diese Menge enthält entweder den Nullpunkt oder sie tut es nicht.

1. Ist $0 \in \Omega$, dann gibt es $\boldsymbol{u} \in \mathbb{S}_{m+n}$, so daß

$$0 = \sum_{j=1}^{n} u_j \boldsymbol{a}_j + \sum_{j=1}^{m} u_{n+j} \boldsymbol{e}_j \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \neq \widehat{\boldsymbol{u}} = \left(u_j \ : \ j = 1, \dots, n\right). \tag{2.3.12}$$

[24]Man muss natürlich fair sein und berücksichtigen, daß das Kolmogoroff–Kriterium erst 1948 in [18] angegeben wurde – dafür gilt es aber auch nicht nur für endlichdimensionale Räume, sondern ebenfalls für Funktionenräume, insbesondere für Polynome. Die Sprechweise hat sich dann erst später eingebürgert.

[25]Das ist nicht so verwunderlich, denn viele Argumente in der „theoretischen Optimierung“ stammen tatsächlich aus der konvexen Analysis.

[26]Was wieder einmal komponentenweise zu verstehen ist: $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}$ bedeutet $x_j \geq y_j$ für alle Indizes j.

Da $0 \le \widehat{\boldsymbol{u}}$ und $\widehat{\boldsymbol{u}} \neq \boldsymbol{0}$ ist, folgt also auch $0 < u := u_1 + \cdots + u_n$ und mit $\boldsymbol{y} := \widehat{\boldsymbol{u}}/u$ sowie (2.3.12) erhalten wir, daß

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{a}_j = \frac{1}{u}\sum_{j=1}^{n} u_j \boldsymbol{a}_j = -\frac{1}{u}\sum_{j=1}^{m} u_{n+j}\boldsymbol{e}_j \le 0$$

ist, was gerade den zweiten Teil unserer Behauptung darstellt.

2. Ist hingegen $0 \notin \Omega$, dann gibt es nach Proposition 2.3.8 einen Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}$, so daß

$$c = \boldsymbol{v}^T 0 + c < 0 < \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{a} + c, \qquad \boldsymbol{a} = [\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{I}]\, \boldsymbol{u} \in \Omega.$$

Damit gilt für alle $\boldsymbol{u} \in \mathbb{S}_{m+n}$ die Ungleichung $0 < \boldsymbol{v}^T [\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{I}]\, \boldsymbol{u}$ und wir erhalten insbesondere für $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_j$, $j = 1, \dots, m+n$, daß

$$0 < \boldsymbol{v}^T [\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{I}]\, \boldsymbol{e}_j = \left[\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{v}^T\right] \boldsymbol{e}_j = \begin{cases} \left(\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A}\right)_j, & j = 1, \dots, n \\ v_{j-n}, & j = n+1, \dots, n+m, \end{cases}$$

also ist $\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{A} > 0$ wie auch $\boldsymbol{v} > 0$ und somit ist $\boldsymbol{x} := \boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}| \in \mathbb{S}_m$ in diesem Fall der gesuchte Alternativvektor.

Daß sich die beiden Alternativen ausschließen, das sieht man sehr einfach: Gäbe es nämlich $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$, die gleichzeitig beide Forderungen erfüllen, dann erhielten wir

$$0 < \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \quad \Rightarrow \quad 0 < \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{y} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \le 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \le 0,$$

was einen soliden Widerspruch darstellen würde: $0 < 0$. □

So, damit haben wir alle Bausteine beisammen, die wir brauchen, um das Minimax–Theorem zu beweisen, also wollen wir das auch tun.

Beweis von Satz 2.3.1: Wegen (2.3.3) ist

$$v_1 = \max_{\boldsymbol{p} \in \mathbb{S}_m} \min_{\boldsymbol{q} \in \mathbb{S}_n} a(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \max_{\boldsymbol{p} \in \mathbb{S}_m} \min_{k=1,\dots,n} \left(\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A}\right)_k$$

und nach (2.3.4) entsprechend

$$v_2 = \min_{\boldsymbol{q} \in \mathbb{S}_n} \max_{\boldsymbol{p} \in \mathbb{S}_m} a(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \min_{\boldsymbol{q} \in \mathbb{S}_n} \max_{j=1,\dots,m} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{q})_j$$

mit $v_1 \le v_2$. Wäre nun $v_1 < v_2$, dann können wir $\boldsymbol{A}$ durch $\boldsymbol{A}' := \boldsymbol{A} - \frac{v_2+v_1}{2} \boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T$ ersetzen, was uns die Auszahlungsfunktion

$$a'(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = a(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) - \frac{v_1 + v_2}{2} \underbrace{\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{1}}_{=1} \underbrace{\boldsymbol{1}^T \boldsymbol{q}}_{=1} = a(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) - \frac{v_1 + v_2}{2}$$

liefert, die ihre Minimaxe immer noch an derselben Stelle wie a hat, für die aber nun

$$v_1' = v_1 - \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{v_1 - v_2}{2} < 0 < \frac{v_2 - v_1}{2} = v_2 - \frac{v_1 + v_2}{2} = v_2'$$

gilt. Doch das kann nicht sein! Denn nach Lemma 2.3.9 gibt es entweder ein $\boldsymbol{x} \in \mathbb{S}_m$ mit $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}' > 0$, also

$$v_1' = \max_{\boldsymbol{p} \in \mathbb{S}_m} \min_{k=1,\dots,n} \left(\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A}'\right)_k \ge \min_{k=1,\dots,n} \left(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}'\right)_k > 0,$$

oder aber ein $\boldsymbol{y} \in \mathbb{S}_n$ mit

$$v_2' = \min_{\boldsymbol{q} \in \mathbb{S}_n} \max_{j=1,\dots,m} (\boldsymbol{A}'\boldsymbol{q})_j \le \max_{j=1,\dots,m} (\boldsymbol{A}'\boldsymbol{y})_j \le 0,$$

aber keinesfalls kann $v_1' < 0 < v_2'$ sein. □

2.4 Struktur der Optimallösungen

Das Minimax–Theorem garantiert die Existenz von Optimalstrategien und ordnet gleichzeitig jedem Spiel seinen eindeutigen Wert zu. Nur beim Auffinden der optimalen Strategien kommen wir so natürlich noch nicht wirklich weiter. Daher ist es sinnvoll, sich erst einmal zu überlegen, welche Struktur die Menge der Optimallösungen[27] hat – schließlich kann uns das ja auch helfen, die Optimallösungen zu finden! Die erste Beobachtung ist eine einfache Charakterisierung der Optimalstrategien.

Korollar 2.4.1. *Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Auszahlungsmatrix zu einem Spiel mit Wert v. Dann sind $\boldsymbol{p} \in \mathbb{S}_m$ und $\boldsymbol{q} \in \mathbb{S}_n$ jeweils genau dann optimale Strategien, wenn*[28]

$$\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A} \ge v\,\mathbf{1}^T \qquad \textit{bzw.} \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{q} \le v\mathbf{1} \tag{2.4.1}$$

ist.

Beweis: Nach Lemma 2.3.6 ist für jede Optimalstrategie $\boldsymbol{p}$

$$v = \max_{\boldsymbol{p}'\in\mathbb{S}_m} \min_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{S}_n} a(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{q}) = \min_{k=1,\dots,n} \left(\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A}\right)_k \qquad \Rightarrow \qquad \left(\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A}\right)_k \ge v,$$

und somit $\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A} \ge v\mathbf{1}^T$, und die zweite Ungleichung folgt ganz analog.

Gilt umgekehrt $\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A} \ge v\mathbf{1}^T$, dann ist

$$\min_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{S}_n} \max_{\boldsymbol{p}'\in\mathbb{S}_m} a(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{q}) \ge \min_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{S}_n} \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{q} \ge \min_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{S}_n} v \underbrace{\mathbf{1}^T\boldsymbol{q}}_{=1} = v$$

und $\boldsymbol{p}$ ist eine Optimalstrategie für S_1, denn ganz egal, wie S_2 seine gemischte Strategie wählt, ist die erwartete Auszahlung mindestens v. Analog liefert $\boldsymbol{A}\boldsymbol{q} \le v\mathbf{1}^T$, daß

$$\max_{\boldsymbol{p}\in\mathbb{S}_m} \min_{\boldsymbol{q}'\in\mathbb{S}_n} a(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}') \le \max_{\boldsymbol{p}\in\mathbb{S}_m} \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{q} \le \max_{\boldsymbol{p}\in\mathbb{S}_m} v \underbrace{\boldsymbol{p}^T\mathbf{1}}_{=1} = v,$$

und jetzt hängt Spieler 1 unterhalb von v fest. □

Korollar 2.4.2. *Die Mengen $\mathscr{P}^* \subseteq \mathbb{S}_m$ und $\mathscr{Q}^* \subseteq \mathbb{S}_n$ der Optimalstrategien für Spieler 1 bzw. Spieler 2 sind konvex.*

Beweis: Sind $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_k \in \mathscr{P}^*$ optimale Strategien und $\alpha \in \mathbb{S}_k$, dann setzen wir $\boldsymbol{p} = \alpha_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{p}_k$, erhalten dank Korollar 2.4.1, daß

$$\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A} = \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j\,\boldsymbol{p}_k\right)^T \boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^k \alpha_j\,\boldsymbol{p}_k^T\boldsymbol{A} \ge \sum_{j=1}^k \alpha_j \left(v\mathbf{1}^T\right) = v\mathbf{1}^T,$$

und wiederum Korollar 2.4.1 sagt uns, daß $\boldsymbol{p} \in \mathscr{P}^*$ ist. Einen expliziten Beweis für $\mathscr{Q}^*$ erwartet hoffentlich niemand. □

Nun gibt es aber ein Vielzahl von konvexen Mengen, beispielsweise Kreise und Kugeln, aber auch *konvexe Polyeder*, die sich dadurch auszeichnen, daß sie Durchschnitte von Halbräumen sind, also Durchschnitte von Mengen der Form $\left\{\boldsymbol{x} \;:\; \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \ge b\right\}$. Schreibt man all diese Bedingungen in Matrixform zusammen, dann erklärt sich die nächste Definition.

[27] Zur Struktur gehört auch die Frage, ob diese Menge einelementig ist oder nicht, ob der Plural hier also berechtigt ist oder nicht.

[28] Eine kleine Warnung: Die $\mathbf{1}$–Vektoren, die in (2.4.1) auftauchen, haben normalerweise unterschiedliche Länge, nämlich n bzw. m.

Definition 2.4.3. Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvexes Polyeder*, wenn es eine Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und einen Vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ gibt, so daß

$$\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{b}\}.$$

Das Polyeder wird als *endlich* oder *kompakt* bezeichnet, wenn es kompakt ist[29], also wenn es eine beschränkte[30] Menge ist:

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega} \|\boldsymbol{x}\| < \infty.$$

Bemerkung 2.4.4. Am Wörtchen „konvex“ in Definition 2.4.3 könnte man sich etwas stören, aber da so ein Polyeder ein Durchschnitt von Halbräumen ist, die ihrerseits immer konvex sind, muß es halt auch wieder konvex sein.

Übung 2.4.1 Zeigen Sie: Sind $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, dann ist auch $\Omega \cap \Omega'$ konvex. ◊

Aus Korollar 2.4.1 bzw. (2.4.1) erhalten wir dann sofort die folgende Beobachtung.

Korollar 2.4.5. *Die optimalen Strategien $\mathscr{P}^*$ bzw. $\mathscr{Q}^*$ bilden konvexe Polyeder.*

Was sind nun eigentlich unsere Unbekannten im Minimax–Theorem 2.3.1? Es sind ja nicht nur die magischen Optimalstrategien $\boldsymbol{p}^*$ und $\boldsymbol{q}^*$, sondern auch noch der Wert v des Spiels! Würden wir den Wert kennen, dann müssten wir nur die Ungleichungssysteme $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{p}^* \ge v\boldsymbol{1}$ bzw. $-\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}^* \ge -v\boldsymbol{1}$ lösen[31], um an Optimalstrategien zu kommen. Nun ist aber v ebenfalls unbekannt, also behandeln wir es wie eine anständige Unbekannte und erhalten, daß $\boldsymbol{p}^*$, $\boldsymbol{q}^*$ und v das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{p}^* - \boldsymbol{1}v &\ge \boldsymbol{0}, \\ -\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}^* + \boldsymbol{1}v &\ge \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

mit $\boldsymbol{p}^* \in \mathbb{S}_m$ und $\boldsymbol{q}^* \in \mathbb{S}_n$ lösen müssen. Codieren wir die Bedingung $\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{p}^* = 1$ in $\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{p}^* \ge 1$ und $-\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{p}^* \ge -1$, dann suchen wir nur noch nach $v \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{p}^* \in \mathbb{R}^m$ und $\boldsymbol{q}^* \in \mathbb{R}^n$, die das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{p}^* - \boldsymbol{1}v &\ge \boldsymbol{0}, \\ -\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}^* + \boldsymbol{1}v &\ge \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{1}^T\boldsymbol{p}^* &\ge 1, \\ -\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{p}^* &\ge -1, \\ \boldsymbol{1}^T\boldsymbol{q}^* &\ge 1, \\ -\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{q}^* &\ge -1, \\ \boldsymbol{p}^* &\ge 0, \\ \boldsymbol{q}^* &\ge 0, \end{aligned}$$

[29] Das überrascht nun niemanden so richtig.
[30] Abgeschlossen sind die konvexen Polyeder wegen des „≥“ ja immer.
[31] Beziehungsweise Halbräume schneiden.

in Matrixschreibweise

$$
\boldsymbol{Bx} := \left[\begin{array}{c|c|c}
\boldsymbol{A}^T & & \mathbf{-1} \\
 & -\boldsymbol{A} & \mathbf{1} \\ \hline
\mathbf{1}^T & & \\
-\mathbf{1}^T & & \\ \hline
 & \mathbf{1}^T & \\
 & -\mathbf{1}^T & \\ \hline
\boldsymbol{I} & & \\
 & \boldsymbol{I} &
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{p}^* \\ \boldsymbol{q}^* \\ v \end{array}\right] \ge
\left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \hline 1 \\ -1 \\ \hline 1 \\ -1 \\ \hline \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array}\right] \tag{2.4.2}
$$

erfüllt, wobei wir $\boldsymbol{p}^*$, $\boldsymbol{q}^*$ und v praktischerweise im Vektor $\boldsymbol{x}$ zusammenfassen. Eine einfache Octave–Routine, die das Ungleichungssystem aufstellt, ist in Abb. 2.4.1 angegeben. Jede Lösung dieses Ungleichungssystems ist eine optimale Strategie und die numerische Bestimmung von optimalen Strategien und damit auch des Wertes eines Spiels besteht also in der numerischen Lösung des Ungleichungssystems. Allerdings ist das Ungleichungssystem hochgradig *überbestimmt*: Den $m+n+1$ Variablen $\boldsymbol{p}^*$, $\boldsymbol{q}^*$ und v stehen insgesamt $2m+2n+4$ Ungleichungen gegenüber.

```
%%   GameStratBed.m (Spieltheorie)
%%   ----------------------------------------------------------
%%   Ungleichungssystem fuer Spielmatrix X von der Form
%%     Ax <= b, x >= 0 - Primale Form fuer Lineare Optimierung
%%   Eingabe:
%%     X      Auszahlungsmatrix des Spiels
%%   Ausgabe:
%%     A      Nebenbedingungsmatrix
%%     b      rechte Seite

function [A,b] = GameStratBed( X )
  [m,n] = size( X );

  A = [
       -X', zeros( n,n ), ones( n,1 );
       zeros( m,m ), X, -ones( m,1 );
       -ones( 1,m ), zeros( 1,n ), 0;
       ones( 1,m ), zeros( 1,n ), 0;
       zeros( 1,n ), -ones( 1,m ), 0;
       zeros( 1,n ), ones( 1,m ), 0
       ];

  b = [
       zeros( m+n,1 ); -1; 1; -1; 1
       ];
```

Abbildung 2.4.1: `GameStratBed.m`: Aufstellen der Matrix für das Ungleichungssystem (2.4.2).

Im Falle eines symmetrischen Spiels ist das alles viel einfacher, denn da ist $v = 0$ und die Rollen von $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{q}$ vollkommen vertauschbar, so daß sich das Ungleichungssystem auf die viel einfachere Form

$$\boldsymbol{Bx} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^T \\ \boldsymbol{1}^T \\ -\boldsymbol{1}^T \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{p}^* \geq \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ 1 \\ -1 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{2.4.3}$$

reduziert; die optimale Strategie für Spieler 2 ist dann natürlich $\boldsymbol{q}^* = \boldsymbol{p}^*$. Das gibt ein sehr einfaches Optimalitätskriterium für Strategien zu symmetrischen Spielen.

Korollar 2.4.6. *Eine gemischte Strategie $\boldsymbol{p} \in \mathbb{S}_m$ ist genau dann optimal für ein symmetrisches Spiel zu Matrix $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T$, wenn $\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{p} \geq 0$ ist.*

Beispiel 2.4.7 (Stein, Schere, Papier, mit oder ohne Brunnen). Die Optimalität der Strategie $\boldsymbol{p} = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]^T$ sieht man dank Korollar 2.4.6 nun sofort aus

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0},$$

und es ist auch die einzige Optimalstrategie, denn $\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{p} \geq 0$ bedeutet ja[32]

$$p_2 \leq p_3, \quad p_3 \leq p_1, \quad p_1 \leq p_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad p_1 = p_2 = p_3.$$

Analog gilt für $\boldsymbol{p}' = \left[0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]^T$ bei der Variante mit Brunnen, daß

$$\boldsymbol{A}'^T \boldsymbol{p}' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq \boldsymbol{0}. \tag{2.4.4}$$

Man sieht aber auch, daß das „naheliegende“ $\boldsymbol{p} = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]^T$ für die Brunnenvariante *nicht* optimal sein kann, da dann

$$\boldsymbol{A}'^T \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \\ -1/4 \end{bmatrix}$$

positive wie negative Einträge hat.

Bemerkung 2.4.8. (2.4.4) zeigt übrigens auch, daß $\left[0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ die *einzige* Optimalstrategie ist. Würde Spieler 2 nämlich eine wie auch immer geartete Strategie mit $q_1 > 0$ spielel, dann wäre die erwartete Auszahlung für Spieler 1 bei Nutzung der Optimalstrategie ja

$$\left[\frac{1}{3}, 0, 0, 0\right] \boldsymbol{q} = \frac{q_1}{3} > 0$$

und damit ist für Spieler 2 $q_1 = 0$ Pflicht, aus Symmetriegründen dann aber auch $p_1 = 0$. Und die einzige „nichtnegative“ Stratgie für den Rest ist die gleichverteilte.

[32]Einfach die drei Ungleichungen hingeschrieben.

Bestimmung optimaler gemischter Strategien | 3

Der große Kunstgriff, kleine Abweichungen von der Wahrheit für die Wahrheit selbst zu halten, worauf die ganze Differentialrechnung gebaut ist, ist zugleich der Grund unserer witzigen Gedanken, wo oft das Ganze hineinfallen würde, wenn wir die Abweichungen in einer philosophischen Strenge nehmen würden.

(Lichtenberg)

In diesem Abschnitt wollen wir der naheliegenden Frage nachgehen, wie man denn nun die optimalen Strategien aus dem Minimax–Theorem 2.3.1 wirklich *berechnen* kann, denn bisher haben wir ja keinen systematischen Zugang, sondern konnten lediglich ein paar spezielle Probleme durch geschicktes Raten lösen. Diese Frage führt uns ganz automatisch in die Welt der linearen Optimierung und zum *Simplexalgorithmus*.

3.1 Polyeder, Ecken und Kanten

In Korollar 2.4.5 haben wir festgestellt, daß die optimalen Strategiemengen konvexe Polyeder bilden[1], und so ein konvexes Polyeder Ω besteht ja aus verschiedenen Typen von Punkten:

Innere Punkte $x \in \Omega^\circ$ haben die Eigenschaft, daß zusammen mit x auch die Kugeln

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^m \ : \ \|y - x\|_2 \le \varepsilon\}, \qquad \varepsilon > 0,$$

für hinreichend kleines ε zu Ω gehören,

Randpunkte $x \in \Omega \setminus \Omega^\circ$ bilden den traurigen Rest und

Eckpunkte x sind gerade diejenigen, die sich nicht als echte oder *strikte* Konvexkombination zweier Punkte aus Ω bilden lassen:

$$x = \alpha y + (1-\alpha)\, y', \quad \alpha \in (0,1) \qquad \Rightarrow \qquad y = y'. \tag{3.1.1}$$

Die Menge aller Eckpunkte von Ω bezeichnen wir mit $V(\Omega)$.

Es leuchtet intuitiv ein, daß die Ecken *Extremalpunkte* eines jeden konvexen Polyeders sind und daß sich zumindest endliche konvexe Polyeder auch vollständig durch ihre Eckpunkte beschreiben lassen. Daß das für unendliche nicht ausreichen kann, sieht man schon in Abb. 3.1.1. Aber zuerst beschreiben wir einmal die Ecken eines konvexen Polyeders[2] in seiner Darstellung als Schnitt von Halbräumen,

$$\Omega = \Omega\,(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax \ge b\}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m. \tag{3.1.2}$$

[1] Für die, die's noch nicht gemerkt haben: einpunktige Mengen sind trivialerweise konvexe Polyeder, obwohl *Monoeder* wohl angebrachter wäre.

[2] Die Rollen von A und b sind die aus Definition 2.4.3.

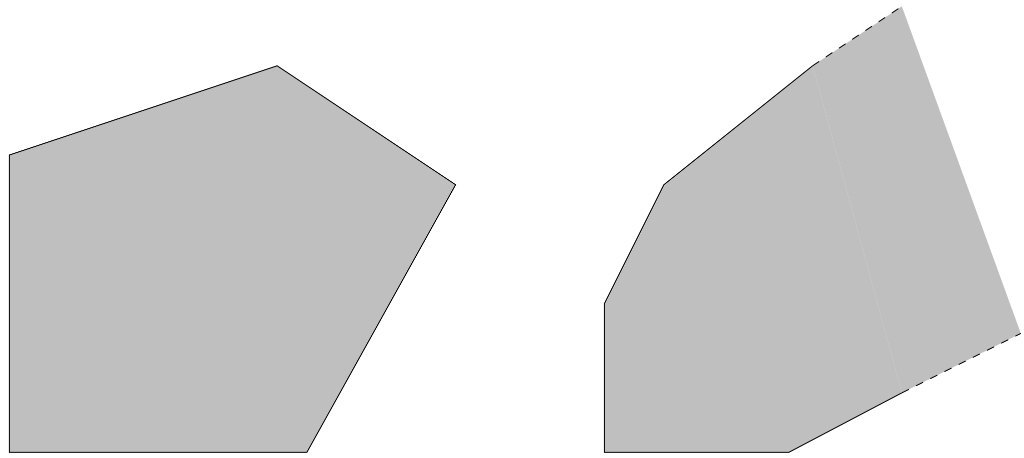

Abbildung 3.1.1: Ein endliches *(links)* und ein unendliches *(rechts)* konvexes Polyeder.

Damit das überhaupt ein „vernünftiges“, zumindest aber endliches Polyeder ergeben kann, sollte das Ungleichungssystem schon überbestimmt sein. Um weitere Pathologien auszuschließen, wollen wir außerdem annehmen, daß das Polyeder nicht *entartet* ist, also in einer $m-1$–dimensionalen Hyperebene des $\mathbb{R}^m$ liegt. Das wäre der Fall, wenn die Spalten von $\boldsymbol{A}$ *linear abhängig* wären, wenn es also einen Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ gibt, so daß $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ist.

Übung 3.1.1 Zeigen Sie: Ist $\Omega = \Omega(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ ein endliches Polyeder, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, dann muß $m \geq n$ sein und das Polyeder ist nicht entartet. ◊

Übung 3.1.2 Zeigen Sie, daß die inneren Punkte von Ω genau diejenigen Punkte des $\mathbb{R}^n$ sind, die die Ungleichung aus (3.1.2) *strikt* erfüllen:

$$\Omega^\circ = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > \boldsymbol{b}\}.$$

◊

Lemma 3.1.1. *Sei $\Omega = \Omega(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, ein endliches konvexes Polyeder. Dann ist $\boldsymbol{x} \in \Omega$ genau dann eine Ecke von Ω, wenn es eine Indexmenge $J \subset \{1, \dots, m\}$, $\#J = n$, gibt, so daß*

$$\boldsymbol{A}_J\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})_J = \boldsymbol{b}_J, \qquad \textit{d.h.} \qquad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})_j = \boldsymbol{b}_j, \quad j \in J, \tag{3.1.3}$$

und

$$\det \boldsymbol{A}_j \neq 0, \qquad \boldsymbol{A}_J = \left[a_{jk} \ : \ j \in J,\ k = 1, \dots, n\right]. \tag{3.1.4}$$

Beweis: Beginnen wir mit „$\Leftarrow$“. Ist $\det \boldsymbol{A}_J \neq 0$ und[3] $\boldsymbol{x} \in \Omega$ so, daß $\boldsymbol{A}_J\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_J$, dann ist $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_J^{-1}\boldsymbol{b}_J$ natürlich ein Randpunkt[4] von Ω. Wäre außerdem $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}'$ für $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{y}' \in \Omega$, dann ist

$$\boldsymbol{b}_J = \boldsymbol{A}_J\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_J\left(\alpha\boldsymbol{y} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}'\right) = \alpha \underbrace{\boldsymbol{A}_J\boldsymbol{y}}_{\geq \boldsymbol{b}_J} + (1-\alpha) \underbrace{\boldsymbol{A}_J\boldsymbol{y}'}_{\geq \boldsymbol{b}_J} \geq \boldsymbol{b}_J,$$

also $\boldsymbol{b}_J = \boldsymbol{A}_J\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}_J\boldsymbol{y}'$ und damit haben wir den Widerspruch $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}_J^{-1}\boldsymbol{b}_J = \boldsymbol{y}'$ erhalten.

[3] Achtung: Hier müssen wir annehmen, daß $\boldsymbol{x}$ zu Ω gehört! Das ist Teil der Annahme in diesem Lemma!

[4] In allen zu J gehörigen Indizes herrscht Gleichheit, siehe auch Übung 3.1.2.

Für die Umkehrung fixieren wir eine Ecke x von Ω, für die die Indexmenge

$$J = J(x) = \left\{ j \ : \ (Ax)_j = b_j \right\} \subset \{1, \dots, m\}$$

nichtleer sein muß, da jeder Eckpunkt auch ein Randpunkt ist, und betrachten die Matrix A_J. Gäbe es nun ein y, so daß $A_J y = 0$ ist, dann werden wir feststellen, daß x keine Ecke sein kann! Dazu setzen wir

$$0 < \varepsilon := \min_{j \notin J} (Ax)_j - b_j$$

und bemerken, daß für $|\eta| \le \eta_0 := \epsilon \, \|Ay\|_\infty$ die Beziehungen

$$A_J \, (x + \eta y) = b_J, \qquad [A \, (x + \eta y)]_j \ge b_j, \quad j \notin J,$$

gelten, also insgesamt $A \, (x + \eta y) \ge b$, $|\eta| \le \eta_0$, also ist

$$\{x + \eta y \ : \ \eta \in [-\eta_0, \eta_0]\} \subset \Omega,$$

aber eben auch

$$x = \frac{1}{2} (x + \eta y) + \frac{1}{2} (x - \eta y),$$

weswegen x dann plötzlich keine Ecke mehr wäre. Hat aber A_J nur einen trivialen Kern[5], dann ist $\#J \ge n$, die Zeilen von A sind linear unabhängig[6] und daher finden sich darunter auch n linear unabhängige Zeilen, was wieder einer Teilmenge $J' \subseteq J$ entspricht, so daß

$$\#J' = n \qquad \text{und} \qquad \det A_{J'} \ne 0$$

ist – und genau darauf wollten wir ja hinaus. □

Was aber bringt uns nun dieses Lemma 3.1.1 für unsere Spieltheorie? Ganz einfach: Anstatt uns die gesamte konvexe Menge der Optimalstrategien anzusehen, reicht es, wenn wir uns auf die *Ecken* dieser konvexen Polyeder beschränken, und das ist nur eine endliche Menge, so daß wir mit etwas Arbeit *immer* die optimale Strategie finden können. Das zu betrachtende Polyeder ist für ein asymmetrisches Spiel durch

$$Bx \ge b, \qquad x = \begin{bmatrix} p^* \\ q^* \\ v \end{bmatrix},$$

gegeben, wobei B und b durch (2.4.2) festgelegt sind, für symmetrische Spiele hingegen ist $x = p^*$ und B und b haben die wesentlich einfachere Form aus (2.4.3). Daß wir Lemma 3.1.1 auch wirklich anwenden können, das liegt an der speziellen Struktur der Matrizen B.

Übung 3.1.3 Zeigen Sie, daß die Matrizen B aus (2.4.2) bzw. (2.4.3) maximalen Rang $m + n + 1$ bzw. m haben. ◇

Und jetzt kommt Lemma 3.1.1 ins Spiel: Jeder Ecke des konvexen Polyeders $\Omega(B, b)$, $B \in \mathbb{R}^{M \times N}$, ist eine Indexmenge $J \subset \{1, \dots, M\}$, $\#J = N$, zugeordnet, so daß $\det B_J \ne 0$ ist. Für so eine Teilmenge setzen wir dann einfach $x = B_J^{-1} b_J$ und haben unsere Ecke

[5] So bezeichnet man den Teilraum der Vektoren x, für die $Ax = 0$ ist.

[6] Ist $\#J > n$, dann spricht man von einer *entarteten Ecke*, das ist eine Ecke, in der sich unwahrscheinlicherweise mehr als n Hyperebenen schneiden. Derartige Ecken sind auch beim Simplexalgorithmus sehr unbeliebt und können dort zu sogenannten *Zyklen* führen.

gefunden. Schön wär's! Der Punkt $B_J^{-1} b_J$ ist nur ein *Kandidat* für eine Ecke, aber leider kann es vorkommen, daß

$$BB_J^{-1} b_J \not\geq b$$

ist, der gefundene Punkt also zwar ein Schnitt von berandenden Hyperebenen, aber eben keine Ecke ist. Anschaulich bedeutet das, daß dieser Schnittpunkt „weit draussen" liegt, siehe Abb. 3.1.2.

Beispiel 3.1.2. Für das Polyeder $\Omega(A, b)$ mit den Parametern

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

liefern alle sechs zweielementigen Teilmengen J von $\{1, 2, 3, 4\}$ invertierbare Mengen A_J. Allerdings liefert $J = \{1, 2\}$ die korrekte Ecke $x = 0$, während $J = \{1, 3\}$ zum Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Bx = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} \not\geq b$$

und somit zu keiner Ecke führt. Wie man in Abb. 3.1.2 sieht, führen vier der Mengen J zu Ecken des Polyeder, zwei allerdings zu Schnittpunkten von Begrenzungshyperebenen, die außerhalb von Ω liegen, also in diesem Sinne *irrelevant* sind.

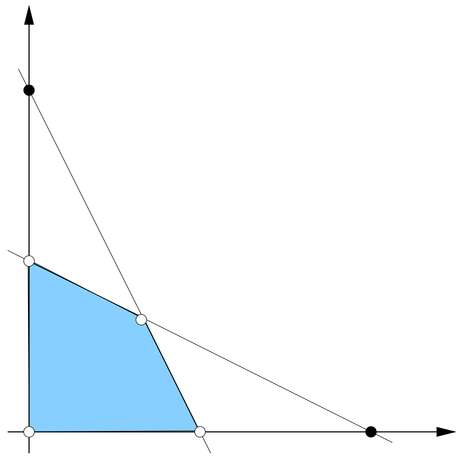

Abbildung 3.1.2: Das konvexe Polyeder aus Beispiel 3.1.2. Die vier „guten" Ecken sind weiß markiert, die zwei „schlechten" Ecken schwarz.

Mit anderen Worten: Die Indexmengen J mit $\det A_J \neq 0$ markieren nur *Kandidaten* für Ecken, nicht notwendigerweise aber Ecken, ganz abgesehen von der Tatsache, daß die Feststellung, ob eine Matrix invertierbar ist oder nicht, numerisch recht haarig ist, siehe [12]. Da die meisten Auszahlungsmatrizen ganzzahlige oder rationale Einträge haben, könnte man natürlich auch symbolisch rechnen, aber das ist auch nicht ohne, da muss man sich schon ranhalten, um überhaupt polynomiale Komplexität zu bekommen, siehe [10]. Trotzdem empfehlen die meisten der populärwissenschaftlichen Bücher zur Spieltheorie, insbesondere [28, 34], gerade diese Vorgehensweise, nämlich die Lösung von Gleichungssystemen.

$$
\begin{bmatrix}
0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}^* \\ \boldsymbol{q}^* \\ v \end{bmatrix}
\ge
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Abbildung 3.1.3: Das Ungleichungssystem zur Bestimmung der Optimallösungen von *Stein, Schere, Papier, Brunnen.*

Das funktioniert bei kleinen Auszahlungsmatrizen noch halbwegs, vor allem dann, wenn man das Problem durch Dominanzen vereinfachen kann, für einen methodischen oder gar systematischen Zugang ist der Ansatz allerdings total ungeeignet.

Beispiel 3.1.3. Für *Stein, Schere, Papier, Brunnen* wird die Optimallösung durch das Ungleichungssystem in Abb. 3.1.3 festgelegt, das uns bereits $\binom{20}{9} = 167960$ mögliche Indexmengen zur Verfügung stellt – viel Spaß beim Ausprobieren!

3.2 Lineare Optimierung und Dualität

Lineare Optimierung oder *Lineare Programmierung* befasst sich mit der Optimierung *linearer Funktionen* unter *linearen Nebenbedingungen*, die Linearität tritt also zweimal auf. In unserer Kurzfassung hier orientieren wir uns im wesentlichen am Buch von Karlin[7] [17], ein nettes „Bilderbuch" zum Thema lineare Optimierung ist darüber hinaus [9]. Das ***primale Problem*** der linearen Optimierung zu vorgegebenen Größen $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, ist nun

$$\max_{\boldsymbol{x}} z(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}, \tag{3.2.1}$$

das *duale Problem* hingegen

$$\min_{\boldsymbol{y}} z'(\boldsymbol{y}) := \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A} \ge \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}. \tag{3.2.2}$$

Definition 3.2.1. Ein Punkt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ bzw. $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ heißt *zulässig*, wenn er die Nebenbedingungen in (3.2.1) bzw. (3.2.2) erfüllt.

[7] Dort werden Spieltheorie und Optimierung aus einer Hand dargeboten.

Daß sich jedes beliebige lineare Optimierungsproblem wahlweise in primaler oder dualer Form schreiben läßt, das kann man als halbwegs bekannt voraussetzen, was uns hier aber mehr interessieren soll, ist die Tatsache, daß selbst für feste $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ die beiden Probleme äquivalent sind! Und das ist ein zentraler Satz der linearen Optimierung.

Satz 3.2.2 (Dualitätssatz). *Hat das primale Optimierungsproblem* (3.2.1) *eine Lösung* $\boldsymbol{x}^*$*, dann hat auch das duale Optimierungsproblem* (3.2.2) *eine Lösung* $\boldsymbol{y}^*$ *und umgekehrt. Die beiden Lösungen erfüllen*

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}^*. \tag{3.2.3}$$

Wie bitte: Lineare Optimierungsprobleme können auch keine Lösung haben? Aber natürlich! Man nehme nur $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, dann hat das Problem (3.2.1) für $\boldsymbol{b} \geq 0$ *keine* Lösung, weil der zulässige Bereich unbeschränkt ist und $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$ über alle Grenzen wachsen wird[8], für $\boldsymbol{b} < 0$ hingegen gibt es keine Lösung, weil es noch nicht einmal zulässige Punkte gibt. Generell gilt wegen (3.2.3) außerdem, daß

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \leq \max_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}^* = \min_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y},$$

also daß für jedes zulässige Paar $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$

$$0 \leq g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} = \left[-\boldsymbol{c}^T \mid \boldsymbol{b}^T \right] \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{array} \right] \tag{3.2.4}$$

ist. Die Funktion g bezeichnet man auch als *Dualitätslücke* von $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ und nach Satz 3.2.2 sind $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ genau dann optimal, wenn $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ ist.

Der Beweis von Satz 3.2.2 verwendet die *Lagrangeschen Formen*

$$\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^T (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}), \qquad \Psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} + \left(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c} \right)^T \boldsymbol{x}, \tag{3.2.5}$$

zum primalen bzw. dualen Optimierungsproblem. Tatsächlich liefern uns diese Funktionen auch wieder einen Bezug zur Spieltheorie, nämlich über *Sattelpunkte.*

Definition 3.2.3. Ein Punkt $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ heißt *Sattelpunkt* von Φ, wenn

$$\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^*) \leq \Phi(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \leq \Phi(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}), \qquad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}. \tag{3.2.6}$$

Satz 3.2.4. *Ein Punkt* $\boldsymbol{x}^*$ *ist genau dann eine Lösung des primalen Problems* (3.2.1) *wenn es einen Vektor* $\boldsymbol{y}^*$ *gibt, so daß* $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ *ein Sattelpunkt von* Φ *ist.*

Ganz ohne Arbeit, also ganz ohne ein eher technisches Hilfsresultat, geht es natürlich nicht. Diesmal brauchen wir die folgende Aussage.

Lemma 3.2.5. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+n}$ *ein abgeschlossenes konvexes Polyeder mit den folgenden beiden Eigenschaften:*

1. *Zu jedem* $z = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{q} \end{array} \right] \in \Omega$ *mit der Eigenschaft, daß* $\boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{0}$ *und* $\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0}$ *ist, gibt es mindestens ein* $1 \leq j \leq m$*, so daß* $q_j < 0$ *ist.*

2. Ω *enthält mindestens einen Punkt* $z = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{q} \end{array} \right]$ *mit* $\boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{0}$ *und* $\boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{0}$ *(was nach Bedingung 1)* $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ *verlangt).*

---

[8] Vorausgesetzt natürlich, daß $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ ist, aber im Falle $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ wäre jeder Wert eine Optimallösung, was auch nicht besonders interessant ist.

Dann gibt es Vektoren $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ *und* $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$*, so daß* $\boldsymbol{u} \ge \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{v} > \boldsymbol{0}$ *und*

$$\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{q} \le 0, \qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix} \in \Omega. \tag{3.2.7}$$

Beweis: Eigentlich muss man sich nur überlegen, was Lemma 3.2.5 geometrisch bedeutet, um zu sehen, welches Hilfsmittel wir benutzen können und sollten: Das konvexe Polyeder Ω hat mit dem ebenfalls konvexen positiven Orthanten

$$\Gamma := \mathbb{R}_+^{m+n} = \left\{ z \in \mathbb{R}^{m+n} \ : \ z \ge \boldsymbol{0} \right\}$$

höchstens eine Teilmenge der n–dimensionalen Ebene mit $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ gemeinsam, die eine Seite des Orthanten darstellt, aber auf keinen Fall einen Punkt mit der ebenfalls konvexen Menge

$$\Gamma := \Gamma_\varepsilon := \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix} \ : \ \boldsymbol{p} \ge \boldsymbol{0}, \ \boldsymbol{q} \ge \varepsilon \boldsymbol{1} \right\} \subset \mathbb{R}_+^{m+n}.$$

Die beiden Mengen kann man nun durch eine Hyperebene voneinander trennen, das ist der eigentliche Trennhyperebenensatz, den wir auch gleich noch als Satz 3.2.7 beweisen werden. Es gibt also eine affine Funktion h_ε, so daß

$$h_\varepsilon(\Omega) < 0 < h(\Gamma_\epsilon), \qquad h_\varepsilon(z) = \boldsymbol{w}_\varepsilon^T z + c_\varepsilon, \qquad \boldsymbol{w}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_\varepsilon \\ \boldsymbol{v}_\varepsilon \end{bmatrix}.$$

Aus der Unbeschränktheit von Γ_ε folgt dann sofort, daß $\boldsymbol{w}_\varepsilon \ge \boldsymbol{0}$ erfüllt zu sein hat und da der Punkt $\boldsymbol{0}$ zu Γ gehört, muß außerdem

$$c := \lim_{\varepsilon \to 0} c_\varepsilon \ge 0$$

sein. Die Funktion

$$h(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon(z) = \boldsymbol{w}^T z + c, \qquad \boldsymbol{w} \ge \boldsymbol{0}, \ c \ge 0, \qquad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ vb \end{bmatrix},$$

trennt nun Ω vom Inneren von Γ und strikt von der *offenen* Seite

$$\Theta := \left\{ z = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix} \ : \ \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}, \ \boldsymbol{q} \ge \boldsymbol{0} \right\} \setminus \{\boldsymbol{0}\} \subset \partial\Gamma,$$

das heißt,

$$h(\Omega) \le 0 < h(z), \qquad z \in \Gamma^\circ \cup \Theta.$$

Andererseits gibt es aber nach Voraussetzung 2 den Punkt $z \in \Omega \cap \Gamma$, der uns

$$0 = h(z) = \underbrace{\left[\boldsymbol{u}^T \ \boldsymbol{v}^T\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}}_{\ge 0} + c \qquad \Rightarrow \qquad c \le 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = 0$$

liefert. Zusammengefasst erhalten wir dann für $z_j = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{e}_j \end{bmatrix}$, $j = 1, \dots, m$, daß

$$\boldsymbol{w}^T \Omega \le 0 < h(z_j) = \left[\boldsymbol{u}^T \ \boldsymbol{v}^T\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{e}_j \end{bmatrix} = v_j, \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{v} > \boldsymbol{0},$$

was genau das ist, was wir behauptet haben. □

Bemerkung 3.2.6.

1. Eigentlich sagt uns der Beweis von Lemma 3.2.5 sogar noch ein bißchen mehr: Für jeden Punkt $z \in \Omega \cap \Gamma$, mit den Komponenten $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ und jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $p_j > 0$ muß $u_j = 0$ sein! In den „Anwendungen" des Lemmas wird $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ sein und die von 0 verschiedenen Komponenten dieses Vektors für ein $\boldsymbol{x}$ sind nun gerade die *nicht aktiven* Nebenbedingungen; die Unterscheidung zwischen aktiven und nicht aktiven Nebenbedingungen ist aber nun andererseits wieder ein zentrales Konzept in der Optimierung, insbesondere bei den allseits beliebten Kuhn–Tucker–Bedingungen, siehe z.B. [27, 32].

2. Karlin [17] beweist das Lemma übrigens über ein Bidualitätsargument für konvexe Kegel – nur müsste man dafür halt noch ein wenig tiefer in die konvexe Analysis einsteigen.

Satz 3.2.7 (Trennhyperebenensatz für konvexe Mengen). *Zu disjunkten, abgeschlossenen und konvexen Teilmengen Ω, Ω' von $\mathbb{R}^m$ gibt es $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}$, so daß*

$$\boldsymbol{v}^T \Omega + c < 0 < \boldsymbol{v}^T \Omega' + c \tag{3.2.8}$$

ist.

Beweis: Wir wählen $\boldsymbol{y} \in \Omega$ und $\boldsymbol{y}' \in \Omega'$ so, daß

$$\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\|_2 = \|\Omega - \Omega'\|_2 = \min \{\|z - z'\|_2 \ : \ z \in \Omega, \ z' \in \Omega'\} > 0,$$

und betrachten den Fehlervektor $\boldsymbol{w} = \pm (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}')$. Wie wir beim Beweis des Trennhyperebensatzes, Proposition 2.3.8, gesehen haben, liegt nun Ω auf der einen Seite der Hyperebene, die durch $h_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{y}$ bestimmt wird, und $\boldsymbol{y}'$ auf der anderen, also:

$$h_1(\Omega) \le h_1(\boldsymbol{y}) < h_1(\boldsymbol{y}').$$

Mit genau derselben Argumentation gilt dann für $h_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{y}'$, daß

$$h_2(\Omega') \ge h_2(\boldsymbol{y}') > h_2(\boldsymbol{y}),$$

weswegen für die affine Funktion $h = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$, also

$$h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^T(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}'),$$

dann

$$h(\Omega) \le h(z_\Omega) < h(z_\Gamma) \le h(\Gamma) \tag{3.2.9}$$

gelten muß. □

So, aber jetzt an die Arbeit, schließlich wollen ja auch noch die Sätze bewiesen sein.
Beweis von Satz 3.2.4: Sei $\boldsymbol{x}^*$ eine Lösung von (3.2.1); wir betrachten die konvexe Menge

$$\Omega = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{c}^T \end{bmatrix} \mathbb{R}^n_+ = \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) \end{bmatrix} \ : \ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \right\} \subset \mathbb{R}^{m+1},$$

die auch ein konvexes Polyeder ist. Setzen wir insbesondere $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$, dann erhalten wir, daß

$$\boldsymbol{0} \le z := \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* \\ \boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^*) \end{bmatrix} \in \Omega$$

ist. Damit können wir Lemma 3.2.5 anwenden und erhalten so einen Vektor $\mathbf{0} \le \boldsymbol{y}^* \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{y} \neq 0$, so daß für alle $z \in \Omega$ die Ungleichung

$$0 \ge \left[\boldsymbol{y}^{*T}\, 1\right] z = \boldsymbol{y}^{*T} (\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^* = \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^*) - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^* \tag{3.2.10}$$

gilt, aus der insbesondere

$$0 \ge \boldsymbol{y}^{*T} \underbrace{(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^*)}_{\ge \mathbf{0}} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{y}^{*T} (\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$$

und somit

$$\Phi(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{y}^{*T} (\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^*$$

folgt. Nochmals (3.2.10) ergibt dann für $\boldsymbol{x} \ge \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{y} \ge \mathbf{0}$

$$\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^*) \le \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^* = \Phi(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \le \Phi(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) + \boldsymbol{y}^T (\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^*) = \Phi(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}),$$

weswegen $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*$ ein Sattelpunkt ist.

Ist umgekehrt $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*$ ein Sattelpunkt von Φ, dann folgt direkt aus der zweiten Ungleichung von (3.2.6), daß für jedes $\boldsymbol{y} \ge 0$

$$\begin{aligned} 0 \quad &\le \quad \Phi(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}) - \Phi(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{y}^T (\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^*) - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{y}^{*T} (\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^*) \\ &= \quad (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^*)^T (\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^*) \end{aligned}$$

sein muß. Wenn wir nun $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^* + \lambda \boldsymbol{e}_j$ für großes λ wählen, dann liefert uns diese Ungleichung, daß $\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^* \ge \mathbf{0}$ sein muß, also ist $\boldsymbol{x}^*$ schon einmal zulässig, und $\boldsymbol{y}^* \ge \mathbf{0}$ erzwingt $\boldsymbol{y}{*}^T (\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^*) \ge \mathbf{0}$. Setzen wir aber $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ in die Ungleichung ein, dann ergibt sich, daß auch $\boldsymbol{y}^{*T} (\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^*) \le \mathbf{0}$ zu sein hat, also hat sogar $\boldsymbol{y}^{*T} (\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$ zu gelten. Die erste Ungleichung von (3.2.6) hingegen liefert, daß

$$\begin{aligned} 0 \quad &\ge \quad \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^*) - \Phi(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^{*T} (\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{y}^{*T} (\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^*) \\ &= \quad (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)^T \left(\boldsymbol{c} - A^T \boldsymbol{y}^*\right), \end{aligned}$$

und so ist für jedes zulässige $\boldsymbol{x}$ mit $\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x} \ge 0$

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^* \quad \ge \quad \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}^{*T} A (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + \underbrace{\boldsymbol{y}^{*T} (\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})}_{\ge \mathbf{0}} - \underbrace{\boldsymbol{y}^{*T} (\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^*)}_{= \mathbf{0}} \ge \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}.$$

Mit anderen Worten: $\boldsymbol{x}^*$ ist eine Lösung! □

Beweis von Satz 3.2.2: Ist $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des primalen Problems, dann gibt es nach Satz 3.2.4[9] auch $\boldsymbol{y}^* \in \mathbb{R}^m$, so daß $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*$ ein Sattelpunkt der Lagrangefunktion[10]

$$\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad = \quad \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} - \boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} - (A\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c})^T \boldsymbol{x} = -\Psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

ist, und damit ist $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*$ auch ein Sattelpunkt[11] von Ψ, weswegen auch das duale Problem eine Lösung hat. □

Der letzte Beweis zeigt uns schon, wie dicht Spiele und lineare Optimierung wirklich miteinander verwandt sind; insbesondere ist Dualität eigentlich nichts anderes, als ein Perspektivwechsel von einem Spieler zum anderen.

---

[9] Und den haben wir inzwischen tatsächlich bewiesen!

[10] Der Übergang von primal zu dual dreht also nur das Vorzeichen um – das sollte uns aus der Spieltheorie irgendwie bekannt vorkommen!

[11] Nur mit vertauschten Rollen von Auf- und Abstieg, aber das ist klar, denn wir sehen das Spiel ja jetzt aus der Perspektive des anderen Spielers!

3.3 Der Simplexalgorithmus

Nach all der Theorie wird es aber jetzt wirklich Zeit für die Praxis, nämlich die Bestimmung der Optimallösung(en)[12] eines linearen Optimierungsproblems. Der dazugehörige Algorithmus ist ein echter Klassiker, wird als *Simplexalgorithmus* bezeichnet und geht auf Dantzig zurück [4], der selbst darüber gesagt hat[13]:

> *The tremendous power of the simplex method is a constant surprise to me.*

Die Idee ist eigentlich ganz einfach: Eine lineare Funktion ist gleichzeitig konvex und konkav und muß daher, siehe Übung 3.3.1, sowohl ihr Minimum als auch ihr Maximum[14] in einer Ecke des zulässigen Bereichs annehmen. Da sich ein „Absuchen" der Ecken mit brutaler Gewalt schon aus Komplexitätsgründen verbietet, selbst wenn man es vornehm als „exhaustive search" bezeichnen könnte, siehe Beispiel 3.1.3, sollte man es etwas geschickter machen. Wenn man schon einmal in einer Ecke sitzt, dann interessiert man sich zu diesem Zeitpunkt nicht für alle anderen Ecken, sondern nur für die viel leichter zu bestimmenden *Nachbarecken* und wählt unter diesen dann diejenige aus, die für den größten Gewinn bei der Zielfunktion sorgt. Und so hüpft der Simplexalgorithmus dann fröhlich von Ecke zu Ecke und erreicht irgendwann einmal die Optimallösung.

Übung 3.3.1 Zeigen Sie: Eine konvexe Funktion nimmt auf einem konvexen und kompakten Polyeder ihr Maximum in einer Ecke an. ◇

Wir wollen den Simplexalgorithmus hier *nicht* im Detail herleiten oder beweisen, das ist Stoff von Optimierungsvorlesungen und -büchern und kann in fast beliebig volkstümlicher Form in der Literatur gefunden werden, natürlich in [17], aber auch in [11], da sogar im Zusammenhang mit Spieltheorie. Den reinen Formalismus in Form eines Kochrezepts ohne störende Mathematik findet man beispielsweise in [9, 34].

Um die Idee zu verstehen, halten wir zuerst einmal fest, daß die Menge Ω der zulässigen Punkte des primalen Problems (3.2.1) durch das Ungleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \le \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{3.3.1}$$

charakterisiert wird, in das wir die Zusatzbedingung $\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$ ganz einfach mit hineincodiert haben. Als nächstes nehmen wir der Einfachheit halber an, das Optimierungsproblem wäre *nichtdegeneriert*[15], das heißt, es ist

$$\det \boldsymbol{B}_J \neq 0, \qquad J \subset \{1, \dots, m+n\}, \ \#J = n, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{I} \end{bmatrix}, \tag{3.3.2}$$

so daß die potentiellen Ecken von Ω gerade den n–elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, m+n\}$ entsprechen. Und weil wir gerade bei den vereinfachenden Annahmen sind, fordern wir auch noch, daß $\boldsymbol{b} \ge \boldsymbol{0}$ sein soll, so daß $\boldsymbol{0} \in \Omega$ ist, auch wenn bereits ein kurzer Blick auf (2.4.2) zeigt, daß wir damit nun wahrlich nicht rechnen sollten.

[12] Eigentlich reicht im Normalfall ja eine!

[13] Um genau zu sein: gesagt haben soll. Ich habe das Zitat auch nur aus einem Buch.

[14] Und deswegen brauchen wir auch keine große Unterscheidung von primalen und dualen Problemen zu machen.

[15] Wie man sich leicht vorstellen kann, sind degenerierte Probleme immer etwas unerfreulich, man kann sie aber algorithmisch handhaben, und zwar ohne allzu großen Aufwand.

Ist aber **0** eine Ecke von Ω, dann hat diese eine schöne einfache Struktur: Die Ecke ist mit ihren Nachbarecken durch die *Kanten* $\lambda \boldsymbol{e}_j$, $j = 1, \dots, n$, $\lambda \geq 0$, verbunden und diese Kanten können wir entlanglaufen solange

$$0 \leq \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\lambda) := \boldsymbol{b} - \lambda \boldsymbol{A} \boldsymbol{e}_j, \qquad \lambda \geq 0,$$

ist. Beim maximalen λ hat mindestens eine Komponente von $\boldsymbol{y}$ den Wert 0, siehe Abb. 3.3.1. Um das machen zu können, muß natürlich $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j)_k = 0$ sein wann immer $b_k = 0$ ist, denn

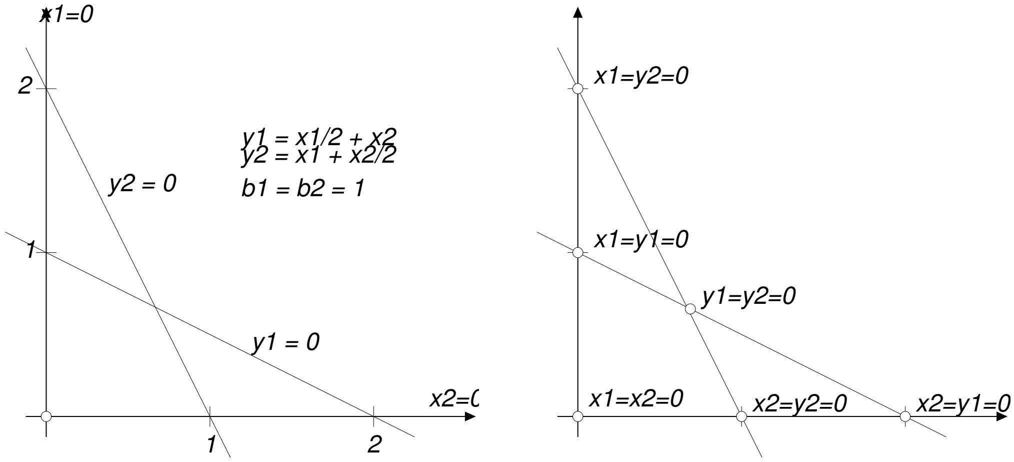

Abbildung 3.3.1: Ein einfaches Beispiel für die Ecke $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ und die Bestimmung der Nachbarecken über $[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}]_J = \boldsymbol{0}$ mit n–elementigen Teilmengen J, hier für $n = 2$.

sonst gibt es entlang $\boldsymbol{e}_j$ keinen Weg aus der Ecke **0**. Für jedes j bekommen wir so aber auf jeden Fall ein $\lambda_j^* \geq 0$, so daß $\lambda_j^* \boldsymbol{e}_j$ die nächstgelegene Nachbarecke ist, und zwar als

$$\lambda_j^* = \min \left\{ \frac{b_k}{a_{kj}} \; : \; a_{kj} > 0 \right\}. \tag{3.3.3}$$

Ist die Menge auf der rechten Seite leer, weil die j–te Spalte $\boldsymbol{a}_j$ von $\boldsymbol{A}$ nichtpositiv ist, $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{a}_j \leq \boldsymbol{0}$, dann können wir λ_j so groß wählen, wie wir wollen – der zulässige Bereich ist jetzt unbeschränkt, eine weitere mögliche Degenerierung des Problems, über die wir großzügig hinwegsehen wollen. Kennt man all diese λ_j, dann wählt man die Nachbarecke, also den Parameter j, natürlich so, daß die Zielfunktion so groß wie möglich wird, das heißt, man interessiert sich für

$$\max_{j=1,\dots,n} \boldsymbol{c}^T \lambda_j^* \boldsymbol{e}_j = \max_{j=1,\dots,n} \lambda_j^* c_j = \max_{j=1,\dots,n} \min_{k=1,\dots,m} \frac{c_j b_k}{a_{kj}},$$

wobei die letzte Identität[16] natürlich nur für $\boldsymbol{A} > \boldsymbol{0}$ korrekt ist – dafür sieht sie aber auch ziemlich nach Sattelpunkt aus[17]. Diese Entscheidungsfindung ist nochmals in Abb. 3.3.2 dargestellt und in der Octave–Routine in Abb. 3.3.3 implementiert. Und jetzt haben wir

[16] Mit dem inversen *Hadamard–Produkt* $\boldsymbol{c}\boldsymbol{b}^T \odot^{-1} \boldsymbol{A}^T$, siehe [21, 15]. Das Hadamard–Produkt ist einfach das komponentenweise Produkt zweier Matrizen und hat die schöne Eigenschaft, kommutativ zu sein sowie zu positiv (semi-)definiten Faktoren auch ein positiv (semi-)definites Ergebnis zu liefern.

[17] Wenn man anfängt, sich mit Spieltheorie zu befassen, dann sieht man offensichtlich überall Sattelpunkte.

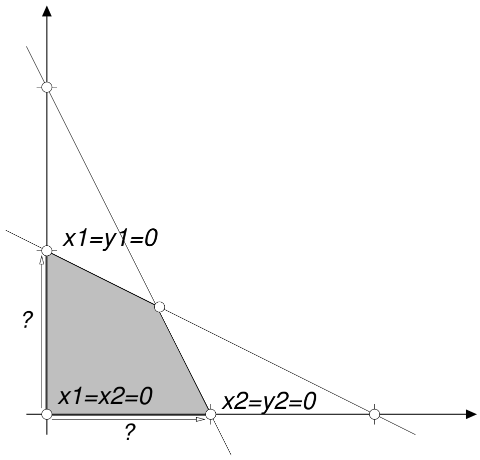

Abbildung 3.3.2: In welche Nachbarecke von $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ gewandert wird, das hängt natürlich vom Verhalten der Zielfunktion ab.

es praktisch geschafft! Ist der obige Maximalwert < 0, dann war $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ bereits die Optimallösung, andernfalls wandern wir in die Nachbarecke $\lambda_j^* \boldsymbol{e}_j$, bei der nun für ein passendes $k \in \{1, \dots, m\}$ die Bedingung $y_k = 0$ erfüllt sein muß, so daß man die Rollen von x_j und y_k vertauschen kann. Dazu drücken wir x_j als Linearkombination dieser Parameter aus, indem wir

$$y_k = \boldsymbol{e}_k^T (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = b_k - \sum_{\ell \neq j} \boldsymbol{e}_k^T \boldsymbol{a}_\ell x_\ell + a_{kj} x_j$$

nach

$$x_j = -b_k + y_k - \sum_{\ell \neq j} a_{k\ell} x_\ell = -\boldsymbol{e}_k^T \left(\boldsymbol{b} - \widehat{\boldsymbol{A}} \widehat{\boldsymbol{x}} \right), \qquad \widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ y_k \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

auflösen – und siehe da, $\widehat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$ ist nun genau die Ecke, in die wir gerade gewandert sind. Die Implementierung dieses *Austauschschritts* ist in Abb. 3.3.4 zu finden.

Das war auch schon der Simplexalgorithmus „in a nutshell“. Natürlich muß man bei der Implementierung und bei einigen Details schon noch ein klein wenig aufpassen, gerade die Unbeschränktheit kann einem schon ein wenig wehtun. Wir werden das später noch sehen.

3.4 Transport, zwei Phasen und Spiele

Bei aller Bedeutung des Simplexalgorithmus stellt sich doch schön langsam die Frage: *„Was hat das alles mit uns zu tun und vor allem was mit Spieltheorie?“* Der Bezug ist natürlich die Suche nach zulässigen Punkten, denn das war bisher vielleicht die massivste Einschränkung, die bei unserem simplen Simplexalgorithmus gemacht haben. Wir haben ja bisher immer gefordert, daß $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$ sein soll, und diese Forderung ist noch nicht einmal in der Optimierung haltbar.

```
%%  SimPivot.m (Spieltheorie)
%%  -------------------------------------------------------
%%  Pivotsuche fuer Simplexalgorithmus
%%  Eingabe:
%%    A        Tableau
%%    pha      Phase: 1/2

function [j,k] = SimPivot( A,pha )
  [m,n] = size( A );
  sm = m + pha - 3; sn = n-1;  %% Suchbereich

  [c,k] = min( A( m,1:n-1) );

  if ( c >= 0 )                %% Fertig
    j = 0;k = -1;
    return;
  end

  y = A( 1:sm, k );
  y = y .* (y > 0);            %% Nur positive Eintraege

  if ( y == 0 )                %% Unbeschraenkt
    disp( '****␣Unbeschraenkt␣****' );
    j = -1; k = -1;
    return;
  end

  %% Alle "unnoetigen" Eintraege in b = 0

  b = A ( 1:sm, n ) ./ ( y + (y == 0) ) .* (y > 0);
  b = b + ( max( abs(b) ) + 1 ) * ( y == 0 );

  [bmin,j] = min( b );
```

Abbildung 3.3.3: `SimPivot.m`: Bestimmung des Pivotelements im Simplexverfahren.

Beispiel 3.4.1 (Transportproblem). In den Rangierbahnhöfen A und B stehen 18 bzw. 12 leere Waggons, in den Bahnhöfen X, Y und Z werden 11, 10 und 9 Waggons benötigt. Die Distanzen zwischen den Bahnhöfen sind in der folgenden Tabelle angegeben.

	X	Y	Z
A	5	4	9
B	7	8	10

Welche Verteilung der Waggons minimiert die gefahrene Kilometerzahl[18]?
Um dieses Problem mathematisch darzustellen, sei x die Anzahl der Wagen, die von A nach X fahren und y die Anzahl der Wagen, die von A nach Y fahren. Dann lassen sich alle Wagenbewegungen durch x und y ausdrücken und zwar durch

[18] Auch hier handelt es sich eigentlich wieder um ein Problem aus der *Ganzzahloptimierung*, aber wieder einmal wird, rein zufällig, die kontinuierliche Optimallösung ganzzahlig sein.

```
%%  SimAustausch.m (Spieltheorie)
%%  --------------------------------------------------------
%%  Austauschschritt fuer Simplexalgorithmus
%%  Eingabe:
%%    A       Tableau
%%    j,k     Koordinaten

function B = SimAustausch( A,j,k )
  piv = A( j,k );
  pzeil = A( j,: );
  pspal = A( :,k );

  %% Rechtecksregel - gnadenlos vektorisiert

  B = A - pspal * pzeil / piv;

  %% Pivotteil

  B( j,: ) = pzeil / piv;
  B( :,k ) = -pspal / piv;
  B( j,k ) = 1/piv;
```

Abbildung 3.3.4: `SimAustausch.m`: Der Austauschschritt im Simplexverfahren.

Strecke	# Wagen
A → X	x
A → Y	y
A → Z	$18 - x - y$
B → X	$11 - x$
B → Y	$10 - y$
B → Z	$x + y - 9$

und alle diese Größen müssen selbstverständlich positiv sein. Die Gesamtzahl der gefahren Kilometer ist

$$\begin{aligned} &5x + 4y + 9\,(18 - x - y) + 7\,(11 - x) + 8\,(10 - y) + 10\,(x + y - 9) \\ &\quad = -x - 3y + 229, \end{aligned}$$

und dieser Wert muß unter den obigen Nebenbedingungen minimiert werden, so daß wir das primale Problem

$$\max 229 - x - 3y, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 18 \\ 11 \\ 10 \\ -9 \end{bmatrix},$$

erhalten, bei dem $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ *nicht* zulässig ist: Wenn man keine Wagen bewegt, dann kommt auch nichts in X, Y oder Z an und das ist nicht erlaubt. Die Menge der Nebenbedingungen ist in Abb. 3.4.1 grafisch dargestellt.

Nur um das klarzustellen: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ erfüllt immer noch die Bedingung aus Lemma 3.1.1 mit $J = \{m + 1, m + 2\}$, aber der Punkt gehört halt leider nicht zum zulässigen Bereich

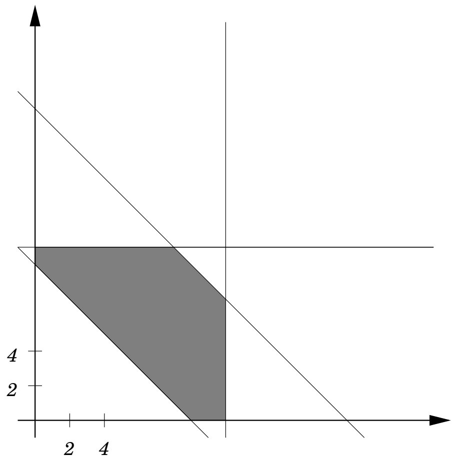

Abbildung 3.4.1: Der zulässige Bereich für das Transportproblem aus Beispiel 3.4.1; der Nullpunkt ist offensichtlich abgeschnitten worden.

Ω, und wir müssen schauen, daß wir irgendwie zu einer zulässigen Ecke kommen! Doch auch dafür können wir wieder den Simplexalgorithmus verwenden, was zur sogenannten *Zweiphasenmethode* führt. Und auch diese basiert wieder auf einem sehr einfachen Trick: Ist nämlich $b^* = \min_j b_j$ negativ, dann betrachtet man das Hilfsproblem

$$\max_{\widehat{\boldsymbol{x}}} z(\widehat{\boldsymbol{x}}) = x_0 + b^*, \qquad [\mathbf{1} \mid \boldsymbol{A}] \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ \boldsymbol{x} \end{bmatrix}}_{=:\widehat{\boldsymbol{x}}} \le \boldsymbol{b}^* := \boldsymbol{b} - b^* \mathbf{1}, \tag{3.4.1}$$

für das man leicht zwei Beobachtungen machen kann:

1. Da nun $\boldsymbol{b}^* \ge \mathbf{0}$ ist, ist $\widehat{\boldsymbol{x}}$ eine zulässige Ecke für das Optimierungsproblem, von der aus man den Simplexalgorithmus starten kann.

2. Ist für irgendein $\widehat{\boldsymbol{x}}$ einmal $z(\widehat{\boldsymbol{x}}) = x_0 + b^* \ge 0$, dann ist

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = [\mathbf{1} \mid \boldsymbol{A}]\, \widehat{\boldsymbol{x}} - x_0 \mathbf{1} \le \boldsymbol{b}^* - x_0 \mathbf{1} = \boldsymbol{b} - b^* \mathbf{1} - x_0 \mathbf{1} = \boldsymbol{b} - \underbrace{(x_0 + b^*)}_{\ge 0} \le \boldsymbol{b}$$

   und wir haben unseren zulässigen Punkt gefunden.

Das war's auch schon: Wir müssen lediglich das modifizierte Problem (3.4.1) so lange mit dem Simplexalgorithmus bearbeiten, bis die Zielfunktion zum ersten Mal bei einem nichtnegativen Wert angekommen ist. Die Optimierer entfernen dann, beispielsweise beim Transportproblem, die Variable x_0 und machen mit dem normalen Simplexalgorithmus weiter. Das heißt dann *Phase II*, hier im Kontext der Spieltheorie sind wir aber schon fertig und haben unseren zulässigen Punkt gefunden – mehr wollten wir ja nicht. Natürlich müssen wir noch wissen, wie man diesen aus dem Simplextableau abliest, aber das findet man dort, wo auch der Simplexalgorithmus und dessen praktische Durchführung diskutiert werden [27, 31]. Für unsere Zwecke reicht die in Abb. 3.4.2 gezeigte Implementierung des Verfahrens.

Zur praktischen Bestimmung der Optimalstrategie kann man schließlich das kleine Octave–Programm in Abb. 3.4.3 nutzen, das lediglich die erweiterte Matrix aus (2.4.2) aufstellt, das Ungleichungssystem mit Phase I löst und dann das Ergebnis passend aufschlüsselt. So lassen sich zu einer vorgegebenen Auszahlungsmatrix problemlos die Optimalstrategien für beide Spieler und der Wert des Spieles bestimmen.

Beispiel 3.4.2 (Stein, Schere, Papier, Brunnen). Für unser Spiel *Stein, Schere, Papier, Brunnen* aus Beispiel 2.1.8 erhalten wir den folgenden Ablauf

```
octave> A = [ 0 1 -1 -1; -1 0 1 -1; 1 -1 0 1; 1 1 -1 0 ];
octave> [p,q,v] = GameOptStrat ( A )
p =
  0.00000
  0.33333
  0.33333
  0.33333

q =
  0.00000
  0.33333
  0.33333
  0.33333

v = 0
```

und das ist genau das, was wir inzwischen von den optimalen Strategien und dem Wert dieses Spiels erwarten können.

Beispiel 3.4.3 (Daiquiri–Spiel). Erinnern wir uns an das Daiquiri–Spiel aus [34] und Übung 1.3.1 mit der Auszahlungsmatrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5.5 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$

und sehen wir uns an, was Optimalstrategien und Wert dieses Spiels sind, nämlich

```
octave> A = [ 5.5 1 ; 1 11 ]; [p,q,v] = GameOptStrat ( A )
p =
  0.68966
  0.31034

q =
  0.68966
  0.31034

v = 4.1034
```

und das ist auch genau das, was wir in [34] finden und was wir für dieses einfache Spiel mit einer (2×2)–Auszahlungsmatrix auch „zu Fuß" hätten ausrechnen können. Etwas verblüffender wird das Ganze aber, wenn wir uns die Sache aus der Sicht von Olaf ansehen, also die optimale Strategie für $-\boldsymbol{A}^T$ berechnen (lassen), denn dann erhalten wir plötzlich

```
octave> [p,q,v] = GameOptStrat ( -A' )
p =
  -0.22222
   1.22222

q =
  1
  0

v = 0
```

was ja nun absolut keinen Sinn ergibt! Ist unser Programm defekt?

Beispiel 3.4.3 zeigt uns, daß wir vor lauter Begeisterung über die Zweiphasenmethode beinahe ein wichtiges Detail übersehen hätten[19]: Die zulässigen Punkte, die wir so bestimmen liegen im *positiven Orthanten*, das ist in den Simplexalgorithmus, auch in seine erste Phase, eingebaut. Mit anderen Worten, es muß

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}^* \\ \boldsymbol{q}^* \\ v \end{bmatrix} \ge \boldsymbol{0} \tag{3.4.2}$$

sein. Das ist unproblematisch, solange $v \ge 0$ ist[20], bricht allerdings zusammen, wenn $v < 0$ ist, denn in diesem Fall kann die Phase I den Optimalpunkt ja gar nicht finden.

Beispiel 3.4.4. Daß das Spiel zur Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5.5 & -1 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$$

nicht ganz fair ist, sondern einen positiven Wert, nämlich 3.2162, hat ist vielleicht nicht so schwer nachzuvollziehen, aber nun liefert uns die Octave–Routine das Ergebnis

```
octave> A = [ 5.5 -1; -1 11 ];
octave> [p,q,v] = GameOptStrat ( -A' )
p =
  0.15385
  0.84615

q =
  1
  0

v = 0
```

[19]Selbstverständlich ist es nicht übersehen worden, sondern dieser Aufbau wurde bewusst und gezielt gewählt, um dezidiert einen besonderen didaktischen Spannungsbogen aufzubauen!
[20]Also insbesondere für alle *fairen* Spiele!

das auf den ersten Blick auch recht harmlos und korrekt aussieht, es aber natürlich nicht ist.

Allerdings ist dieses Problem recht leicht gelöst: Wir berechnen einfach die optimalen Strategien zu $\boldsymbol{A}$ *und* $-\boldsymbol{A}^T$. Hat eines dieser beiden Spiele positiven Wert, so müsste das andere negativen Wert haben, was zu einer nicht korrekten Lösung mit Wert 0 führt, die wir dann halt verwerfen. Das Octave–Programm hierzu findet sich in Abb. 3.4.4.

Damit sind wir aber auch in der Lage, *alle* optimalen Strategien eines Spielers zu bestimmen, indem wir zuerst mit `GameSolve` *eine* optimale Strategie für S_1 und dann eine für S_2[21], vor allem aber den Wert des Spieles bestimmen! Kennen wir einmal den Wert des Spieles, dann sind ja nach Korollar 2.4.1 die Optimalstrategien von Spieler 1 gerade die Lösungen des Ungleichungssystems

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{A}^T \\ \mathbf{1}^T \\ -\mathbf{1}^T \end{bmatrix} \boldsymbol{p} \le \begin{bmatrix} -v\mathbf{1} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{p} \ge \mathbf{0},$$

das genau die richtige Form hat, um als Nebenbedingung eines primalen Problems aufgefasst zu werden. Außerdem kennen wir mit $\boldsymbol{p}^*$ bereits eine Ecke des zugehörigen Polyeders Ω, die man in einem ersten Schritt mittels Austauschschritten in den Nullpunkt transformiert. In der Praxis würde man das nicht so machen, sondern einfach mit dem Ergebnis von Phase I weiterrechnen, indem man die Zeilen und Spalten streicht, die zu $\boldsymbol{q}^*$ und v gehören. Danach kann man mit der Vorgehensweise von (3.3.3) systematisch *alle* Ecken des zulässigen Bereichs aufsuchen. Und hat man einmal alle Ecken, dann hat man auch alle Lösungen …

Übung 3.4.1 Implementieren Sie in Octave ein Programm, das alle Optimalstrategien für S_1 bestimmt. $\diamond$

Übung 3.4.2 Zeigen Sie: Jedes beschränkte konvexe Polyeder ist konvexe Hülle seiner Ecken. $\diamond$

Beispiel 3.4.5 (*Skin Game*, siehe Beispiel 2.3.3). Mit dieser Methodik können wir auch das *Skin Game* mit der Auszahlungsmatrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

angehen und erhalten

[21] Die werden wir ihm natürlich nicht verraten, er soll gefälligst selbst draufkommen

```
octave> [p,q,v] = GameSolve( [ 1 -1 -2; -1 1 1; 2 -1 0 ] )
p =
  0.00000
  0.60000
  0.40000

q =
  0.40000
  0.60000
  0.00000

v = 0.20000
```

Das heißt, die optimale Strategie von Spieler 1 ist $\left(0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$ und bringt ihm einen erwarteten Gewinn von $\frac{1}{5}$ pro Runde. Fair ist offenbar etwas anderes, obwohl das Spiel eigentlich danach aussah.

Wir beenden dieses Kapitel mit einem weiteren Bei–Spiel, in dem man die Optimalstrategie nicht so einfach sieht und ohne unsere Octave–Progrämmchen auch ganz schön arbeiten müsste, oder, wie in [34, S. 164] zu lesen ist:

> *A flash of genius is a useful thing at this point, because straight calculation is wretched.*

Das Spiel selbst wird übrigens nicht nur in [34] diskutiert, sondern auch in den seriösen, mathematisch fundierteren Büchern [17, 26].

Beispiel 3.4.6 (Morra). Jeder Spieler streckt (verdeckt) einen, zwei oder drei Finger aus und rät gleichzeitig, wie viele Finger sein Gegner ausstreckt[22]. Rät *ein* Spieler richtig, so wird ihm die *Gesamtzahl* an angezeigten Fingern ausbezahlt[23], andernfalls endet das Spiel unentschieden, was insbesondere der Fall ist, wenn *beide* Spieler richtig raten, ganz egal, wer mehr Finger angezeigt hat.

Bei Morra ist eine Strategie ein Paar $(a, r) \in \{1, 2, 3\}^2$ und die Auszahlungstabelle hat die folgende Form.

	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$
$(1,1)$	0	2	2	-3	0	0	-4	0	0
$(1,2)$	-2	0	0	0	3	3	-4	0	0
$(1,3)$	-2	0	0	-3	0	0	0	4	4
$(2,1)$	3	0	3	0	-4	0	0	-5	0
$(2,2)$	0	-3	0	4	0	4	0	-5	0
$(2,3)$	0	-3	0	0	-4	0	5	0	5
$(3,1)$	4	4	0	0	0	-5	0	0	-6
$(3,2)$	0	0	-4	5	5	0	0	0	-6
$(3,3)$	0	0	-4	0	0	-5	6	6	0

[22] Nachdem die meisten Leute zwei Hände haben, kann man die eine zum Anzeigen, die andere zum Raten verwenden. Alternativ könnte man die Zahlen auf ein Blatt Papier schreiben oder mit zwei Würfeln darstellen.

[23] Natürlich nicht in Fingern, sonst ist das ein sehr kurzlebiges, wenn auch vielleicht kurzweiliges Spiel.

Was man schön sieht, ist die Tatsache, daß das Zeigen vieler Finger den potentiellen Gewinn, aber auch den potentiellen Verlust vergrößert, daß die Spieler so also das Risiko kontrollieren können. Und siehe da – die Bestimmung einer Optimalstrategie ist jetzt ein Klacks. Mit Hilfe einer Funktion `MorraMat` zur Erzeugung der Auszahlungsmatrix erhalten wir das etwas verblüffende Resultat, daß die Optimalstrategie nur die drei Strategien $(1,3)$, $(2,2)$ und $(3,1)$ verwendet, bei denen jeweils vier Finger auf dem Spiel stehen. Das kleine Programm `MorraMat`, das die nicht ganz triviale Aufgabe übernimmt, die Auszahlungsmatrix für ein n–Finger–Morra aufzustellen, ist in Abb. 3.4.5 aufgelistet.

```
octave> [p,q,v] = GameSolve ( MorraMat( 3 ) )
p =
  0.00000
  0.00000
  0.42553
  0.00000
  0.31915
  0.00000
  0.25532
  0.00000
  0.00000

q =
  -0.00000
   0.00000
   0.42553
   0.00000
   0.31915
  -0.00000
   0.25532
  -0.00000
   0.00000

v = 0
```

Wie man sieht, ist die Strategie ziemlich komplex, die Einträge sind keine einfachen Brüche. Daß einige der Einträge in $\boldsymbol{q}$ den Wert -0 haben, der sich glücklicherweise nicht wirklich von $+0$ unterscheidet, ist auf Rundungsphänomene [14] zurückzuführen.

Morra ist aber nun ein Spiel, bei dem die bei dem die Optimalstrategie *nicht* eindeutig ist, und damit gibt es nach Korollar 2.4.2 eine ganze konvexe Menge von Optimalstrategien, genauer ein *konvexes Polyeder*. Dieses komplett zu bestimmen ist nicht ganz so einfach, denn man muss nun *alle* Ecken des konvexen Polyeders von zulässigen Lösungen des Ungleichungssystems (2.4.2) finden, wozu man den Simplexalgorithmus allerdings noch etwas „aufbohren“ müsste.

Übung 3.4.3 Schreiben Sie ein `Octave`–Programm, das *alle* optimalen Strategien eines gegebenen Spiels ermittelt, indem es alle Ecken des zugehörigen konvexen Polyeders bestimmt. ◊

Daß die Lösung nicht eindeutig ist, zeigt eine einfache Rechnung mit den von 0 verschiedenen Wahrscheinlichkeiten $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$:

```
octave> p2 = [ 0 0 5 0 4 0 3 0 0 ]' / 12;
octave> A'*p2
ans =

   0.16667
   0.00000
   0.00000
   0.08333
   0.00000
   0.08333
   0.00000
   0.00000
   0.16667
```

Dieser Vektor ist $\geq \mathbf{0}$ und da Morra ein faires Spiel ist[24] ist auch das eine Optimalstrategie für Spieler 1, siehe Korollar 2.4.1. Auffällig ist auch, daß die Strategie, die mit dem größten Risiko verbunden ist, mit der geringsten Wahrscheinlichkeit gespielt wird – Feigheit scheint also ein durchaus rationales Verhalten zu sein.

Übung 3.4.4 Bestimmen Sie alle Optimalstrategien für Morra. $\diamond$

Übung 3.4.5 Bestimmen Sie alle Optimalstrategien für das Fünf–Finger–Morra. $\diamond$

[24]Dazu hätten wir nicht erst $v = 0$ errechnen lassen müssen, jede Morra–Matrix ist schiefsymmetrisch!

```
%%   SimPhase1.m (Spieltheorie)
%%   --------------------------------------------------------
%%   Phase1 fuer Simplexalgorithmus
%%   Eingabe:
%%     A,b,c      Parameter des SA

function T = SimPhase1( A,b,c )
  [m,n] = size( A );
  bb = min( b );

  %% Erweitertes Tableau
  T = [
       0, (0:n), 0;
       (-1:-1:-m)', ones( m,1 ), A, b .- bb;
       0, 0, c', 0;
       0, -1, zeros( 1,n ), bb
       ];

  M = m+3; N = n+3; k = 1; kl = 1;
  while ( T( M,N ) < -10^(-15) && k > 0 )
    [j,k] = SimPivot( T( 2:M, 2:N ), 1 );
    if ( k > 0 )
      t = T( 1,k+1 ); T( 1,k+1 ) = T( j+1,1 ); T( j+1,1 ) = t;
      T( 2:M,2:N ) = SimAustausch( T( 2:M,2:N ), j,k );
      kl = k;
    end
  end

  %% Tausche Variable 0 zurueck, wenn noetig

  xx = ( T( 2:M-2,1 ) == 0 );
  if ( sum(xx) > 0 )
    j = find( xx );
    k = kl;

    t = T( 1,k+1 ); T( 1,k+1 ) = T( j+1,1 ); T( j+1,1 ) = t;
    T( 2:M,2:N ) = SimAustausch( T( 2:M,2:N ), j,k );
  end

  %% Finde Spalte zu x0
  k = find( T( 1,2:N-1 ) == 0 );

  %% Modifiziere Randbedingungen
  T( 2:M-1,N ) = T( 2:M-1,N ) + bb * T( 2:M-1,k+1 );

  %% Tausche Spalte nach hinten
  t = T( :,N-1 ); T( :,N-1 ) = T( :,k+1 ); T( :,k+1 ) = t;

  %% Loesche vorletzte Spalte und letzte Zeile
  T = [ T( 1:M-1,1:N-2), T( 1:M-1,N ) ];
```

Abbildung 3.4.2: `SimPhase1.m`: Simplexalgorithmus, Phase I, in einer für unsere Zwecke ausreichenden hausgemachten Version.

```
%%  GameOptStrat.m (Spieltheorie)
%%  -----------------------------------------------------
%%  Optimale gemischte Strategien
%%  Eingabe:
%%    X    Auszahlungsmatrix des Spiels
%%  Ausgabe:
%%    p    Strategie fuer Spieler 1
%%    q    Strategie fuer Spieler 2
%%    v    Wert des Spiels

function [p,q,v] = GameOptStrat( X )
  [m,n] = size( X );

  %% Setup und Phase I
  [A,b] = GameStratBed( X );c = zeros( m+n+1,1 );
  T = SimPhase1( A,b,c );

  %% Extrahiere p,q,v
  p = zeros( m,1 ); q = zeros( n,1 ); v = 0;
  for j = 2:m+n+5
    k = T( j,1 );
    if k <= 0
      continue;
    elseif k <= m
      p( k ) = T( j,m+n+3 );
    elseif k <= m+n
      q( k-m ) = T( j,m+n+3 );
    else
      v = T( j,m+n+3 );
    end
  end
```

Abbildung 3.4.3: `GameOptStrat.m`: Octave–Routine zur Berechnung der Optimallösung, verwendet im wesentlichen einfach nur das Programm aus Abb. 2.4.1 und Phase I des Simplexalgorithmus.

```
%%  GameSolve.m (Spieltheorie)
%%  ---------------------------------------------------------
%%  Optimale gemischte Strategien
%%  Eingabe:
%%    A     Auszahlungsmatrix des Spiels
%%  Ausgabe:
%%    p     Strategie fuer Spieler 1
%%    q     Strategie fuer Spieler 2
%%    v     Wert des Spiels

function [p,q,v] = GameSolve( A )
  [p1,q1,v1] = GameOptStrat( A );
  [q2,p2,v2] = GameOptStrat( -A' );

  if ( v2 > 0 )
    p = p2; q = q2; v = v2;
  else
    p = p1; q = q1; v = v1;
  end
```

Abbildung 3.4.4: GameSolve.m: Berechnung der optimalen Strategien – unter Verwendung des Codes aus Abb. 3.4.3 ist das eine ganz einfache Geschichte.

```
%%  MorraMat.m (Spieltheorie)
%%  ---------------------------------------------------------
%%  Auszahlungsmatrix fuer Morra mit n Fingern
%%  Eingabe:
%%    n     Anzahl der Finger
%%  Ausgabe:
%%    A     Auszahlungsmatrix

function A = MorraMat( n )
  A = zeros( n^2 );

  for j1 = 1:n
    for k1 = 1:n
      for j2 = 1:n
        for k2 = 1:n
          if ( k1 == j2 ) && ( k2 != j1 )
            A( n*(j1-1) + k1, n*(j2-1) + k2 ) = j1+j2;
          end
          if ( k2 == j1 ) && ( k1 != j2 )
            A( n*(j1-1) + k1, n*(j2-1) + k2 ) = -(j1+j2);
          end
        end
      end
    end
  end
```

Abbildung 3.4.5: MorraMat.m: Aufstellung der Auszahlungsmatrix für Morra mit n Fingern.

Poker und Bluffen | 4

Wenn ich allerdings Ihre Auffassung nicht ganz zurückweisen kann, so muß ich doch immerhin sagen, ja betonen, daß ich die allgemeinen Gesichtspunkte bei der Aufrechterhaltung der Bestimmung zwar in Betracht zu ziehen, den Wortlaut der Vorschrift aufs gewissenhafteste zu wahren aber verpflichtet bin, wiewohl ich persönlich immerhin nicht abgeneigt wäre, einer Auffassung mich anzuschließen, die mit der Ihrigen im Prinzip übereinkommt, mich indessen zu einem gerade entgegengesetzten Schlusse führt.

(K. Laßwitz, *Aspira. Geschichte einer Wolke*)

Als nächstes befassen wir uns mit der Behandlung eines klassischen Spiels, nämlich einer vereinfachten Version von *Poker*, die Darstellung folgt [26, S. 186ff]. Beim klassischen *Stud Poker*[1] erhält jeder Spieler fünf Karten und nach einem ersten Einsatz in den Topf beginnen mehrere Bieterunden, bei denen jeder Spieler entweder den Einsatz halten oder erhöhen kann; werden die Einsätze eine Runde lang gehalten, dann werden die Karten verglichen und das beste Blatt gewinnt. Finessen wie das Kaufen von Karten und die Beschränkung des Höchsteinsatzes und der Anzahl der Runden lassen wir jetzt einmal aussen vor.

Klassisches Poker ist aber immer noch zu komplex, für das Verständnis der grundsätzlichen Ideen reicht eine Vereinfachung aus [26] vollkommen aus. Insbesondere betrachten wir nur ein Zweipersonenspiel. Das Ganze wird ein wenig technisch werden[2], aber es zeigt auch sehr gut, mit welchen Herausforderungen jenseits der Theorie man sich beschäftigen muss, wenn man ein konkretes Spiel analysiert.

4.1 Das vereinfachte Spiel und die reinen Strategien

Wir können annehmen, daß die möglichen Karten, die ein Spieler erhalten kann, einfach als $1, \dots, N$ durchnumeriert sind, wobei 1 die schlechteste Hand darstellt, N die beste. Jeder der beiden Spieler zieht also eine Zahl, sagen wir $h_1, h_2 \in \{1, \dots, N\}$. Den Fall $h_1 = h_2$, der bei realen Karten nicht vorkommt[3], ignorieren wir einfach.

Die möglichen Gebote sind zwei Zahlen $0 < a < b$, wobei a natürlich für das niedrige, b für das hohe Gebot steht; die beiden Zahlen subsummieren im vereinfachten Modell lange Bieterunden und auch den Grundeinsatz. In der ersten Runde kann sich jeder Spieler entscheiden, hoch oder niedrig zu bieten, sind die Gebote unterschiedlich, so kann der Spieler mit dem *niedrigen* Gebot sich entscheiden, zu passen, oder sein Gebot auf „hoch" zu ändern. Sind die Gebote gleich hoch, werden die Karten verglichen. Schreiben wir dies mathematisch auf.

[1] Das ist *nicht* das aus „Weltmeisterschaften" bekannte *Texas hold 'em up*.

[2] Anders gesagt: Wir müssen ein bisschen rechnen und uns wirklich um Details kümmern.

[3] Zumindes nicht ohne Falschspielerei.

Definition 4.1.1. Die *Signum-Funktion* $\sigma : \mathbb{R} \to \{0, \pm 1\}$ ist definiert als

$$\sigma(x) := \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Jeder Spieler hat nun die drei Strategien

1. „hoch“, also er bietet b,
2. „passsen“, er bietet a und passt, wenn der andere Spieler „hoch“ geboten hat,
3. „sehen“, er bietet a und erhöht auf b, wenn der andere Spieler „hoch“ geboten hat.

Wir werden der Einfachheit halber die drei Zahlen für die Strategien s_1, s_2 verwenden. Die Auszahlungsmatrix für die Strategien ergibt sich aus Sicht von Spieler 1 bei den Blättern h_1, h_2 als

$$\boldsymbol{A}(h_1, h_2) = \begin{bmatrix} \sigma(h_1 - h_2)\, b & a & \sigma(h_1 - h_2)\, b \\ -a & \sigma(h_1 - h_2)\, a & \sigma(h_1 - h_2)\, a \\ \sigma(h_1 - h_2)\, b & \sigma(h_1 - h_2)\, a & \sigma(h_1 - h_2)\, a \end{bmatrix}. \tag{4.1.1}$$

Jeder Spieler kennt seine Karten und kann also für jeden Wert von h_1 bzw. h_2 eine Strategie $\alpha_{h_1} = s(h_1) \in \{1, 2, 3\}$ bzw. $\beta_{h_2} = s(h_2) \in \{1, 2, 3\}$ mit $h_1, h_2 \in \{1, \dots, N\}$ als ***reine Strategie*** wählen, d.h., die Stragien der beiden Spieler sind $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}^N =: 3^N$. Gehen wir davon aus, daß die Blätter gleichverteilt sind, dann ergibt sich die erwartete Auszahlung als

$$a(\alpha, \beta) = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} e_{\alpha_j}^T \boldsymbol{A}(j, k) e_{\beta_k} = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} a_{\alpha_j, \beta_k}(j, k). \tag{4.1.2}$$

Da die Matrizen $\boldsymbol{A}(h_1, h_2)$ nur von $\sigma(h_1 - h_2)$ abhängen, können wir auch

$$\boldsymbol{A}_+ := \begin{bmatrix} b & a & b \\ -a & a & a \\ b & a & a \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_- := \begin{bmatrix} -b & a & -b \\ -a & -a & -a \\ -b & -a & -a \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_0 := \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1.3}$$

einführen und erhalten

$$a(\alpha, \beta) = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} e_{\alpha^1}^T \boldsymbol{A}_{\sigma(j-k)} e_{\beta_k} =: \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} a_{\sigma(j-k)}(\alpha_j, \beta_k).$$

Damit können wir natürlich nicht so viel anfangen und werden wieder zu gemischten Strategien übergehen.

4.2 Gemischte Strategien und Minimax

Definition 4.2.1. Eine gemischte Strategie für das Pokerspiel ist $\boldsymbol{p} \in \mathbb{S}_{3^N}$, also $\boldsymbol{p} = (p_\alpha : \alpha \in 3^N)$ mit

$$p_\alpha \geq 0, \qquad \sum_{\alpha \in 3^N} p_\alpha = 1. \tag{4.2.1}$$

Bemerkung 4.2.2. In Definition 4.2.1 weisen wir jeder *reinen Strategie* eine eigene Wahrscheinlichkeit zu. Das ist allgemeiner, als lediglich jedem Blatt j eine Wahrscheinlichkeit $p^j \in \mathbb{S}_3$, $j = 1, \dots, s$, zuzuweisen. Letzteres ist dann der Spezialfall, daß

$$p_\alpha = \prod_{j=1}^{N} p^j_{\alpha_j} \tag{4.2.2}$$

als Tensorprodukt der individuellen Wahrscheinlichkeiten bestimmt wird. Die einfache Situation ist also nicht ausgeschlossen, aber eben auch nicht nötig.

Die zu erwartende Auszahlung ist jetzt

$$\begin{aligned}
a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) &= \sum_{\alpha\in 3^N} \sum_{\beta\in 3^N} a(\alpha,\beta) p_\alpha q_\beta \\
&= \sum_{\alpha\in 3^N} \sum_{\beta\in 3^N} \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} a_{\sigma(j-k)}(\alpha_j,\beta_k) p_\alpha q_\beta \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{\alpha\in 3^N} \sum_{\beta\in 3^N} a_{\sigma(j-k)}(\alpha_j,\beta_k) p_\alpha q_\beta \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{r=1}^{3} \sum_{\alpha_j=r} \sum_{s=1}^{3} \sum_{\beta_j=s} a_{\sigma(j-k)}(\alpha_j,\beta_k) p_\alpha q_\beta \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} a_{\sigma(j-k)}(r,s) \left(\sum_{\alpha_j=r} p_\alpha \right) \left(\sum_{\beta_j=s} q_\beta \right).
\end{aligned}$$

Setzen wir

$$p^j_r := \sum_{\alpha_j=r} p_\alpha, \qquad q^k_s := \sum_{\beta_j=s} q_\beta, \tag{4.2.3}$$

dann haben wir also

$$a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} a_{\sigma(j-k)}(r,s) p^j_r q^k_s, \tag{4.2.4}$$

wobei

$$p^j, q^k \in \mathbb{S}_3, \qquad j,k = 1,\dots,N.$$

Die Indentität (4.2.4) zeigt, daß wir jedem Blatt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zuweisen können, die sich durch Summation über die anderen Dimensionen ergibt.

Übung 4.2.1 Zeigen Sie, daß man für den Fall (4.2.2) die p^j durch (4.2.3) wieder erhält. ◊

Um die Optimalstrategien zu bestimmen, brauchen wir ein allgemeines Resultat über symmetrische Spiele[4].

Lemma 4.2.3. *Ist das Spiel* symmetrisch, *d.h.* $\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$, *dann ist* $\boldsymbol{p}$ *eine Optimalstrategie für Spieler eins, genau dann, wenn sie optimal gegen sich selbst ist, das heißt,*

$$\min_{\boldsymbol{q}} a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}). \tag{4.2.5}$$

[4]Was unser vereinfachtes Poker ja ist.

Beweis: Symmetrie bedeutet, daß

$$a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{p} = -\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = -a(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}), \qquad \boldsymbol{p} \in \mathbb{S}_m,\ \boldsymbol{q} \in \mathbb{S}_n.$$

Da das Spiel symmetrisch ist, ist es fair, siehe Korollar 2.3.5, also ist $v = 0$ und eine gemischte Strategie $\boldsymbol{p}$ ist nach Korollar 2.4.1 genau dann optimal, wenn

$$0 \le \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{p}\right)^T = -(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p})^T, \tag{4.2.6}$$

also genau dann, wenn $\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{q} \ge 0 \ge \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}$ für alle $\boldsymbol{q} \in \mathbb{S}_m$, was wiederum zu

$$0 = \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \min_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{S}_m} \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}$$

äquivalent ist, wie behauptet. □

Korollar 4.2.4. *Für eine gemischte Optimalstrategie $\boldsymbol{p}$ aus der Sicht von Spieler 1 für ein symmetrisches Spiel gilt:*

1. *$\boldsymbol{p}$ ist auch eine gemischte Optimalstrategie für Spieler 2,*
2. *$\left(\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A}\right)_k p_k = 0$, $k = 0,\dots,m$, d.h.,*

$$\left\{ \begin{matrix} \left(\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A}\right)_k \\ p_k \end{matrix} \right\} > 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{matrix} p_k \\ \left(\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A}\right)_k \end{matrix} \right\} = 0, \qquad k = 1,\dots,m. \tag{4.2.7}$$

Beweis: 1) erhalten wir, indem wir (4.2.6) als $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} \le 0$ lesen und Korollar 2.4.1 anwenden. Für 2) bemerken wir, daß

$$0 = \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \sum_{k=1}^{m} \left(\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A}\right)_k p_k$$

eine Summe von nichtnegative Termen ist, die nur verschwinden kann, wenn alle Terme Null sind. □

Mininieren wir nun also $a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ bezüglich $\boldsymbol{q}$, dann müssen wir $\boldsymbol{p}$ „nur“ so wählen, daß das Minumum, das von $\boldsymbol{p}$ abhängen wird, an der Stelle $\boldsymbol{p}$ angenommen wird und den Wert Null hat. Dazu betrachen wir, ausgehend on (4.2.4),

$$a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{s=1}^{3} q_s^k \sum_{j=1}^{N} \sum_{r=1}^{3} a_{\sigma(j-k)}(r,s) p_r^j =: \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{s=1}^{3} q_s^k\, w_s^k, \tag{4.2.8}$$

mit

$$w_s^k := w_s^k(\boldsymbol{p}) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{r=1}^{3} a_{\sigma(j-k)}(r,s) p_r^j, \qquad k = 1,\dots,N, \quad r = 1,2,3. \tag{4.2.9}$$

Diese Terme kann man explizit ausrechnen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} N\, w_1^k &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{r=1}^{3} a_{\sigma(j-k)}(r,1) p_r^j \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{r=1}^{3} a_-(r,1) p_r^j + \sum_{r=1}^{3} a_0(r,1) p_r^k + \sum_{j=k+1}^{N} \sum_{r=1}^{3} a_+(r,1) p_r^j \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \begin{bmatrix} -b & -a & -b \end{bmatrix} p^j + \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \end{bmatrix} p^k + \sum_{j=k+1}^{N} \begin{bmatrix} b & -a & b \end{bmatrix} p^j \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \left(-b\, p_1^j - a\, p_2^j - b p_3^j \right) - a p_2^k + \sum_{j=k+1}^{N} \left(b\, p_1^j - a\, p_2^j + b\, p_3^j \right), \end{aligned}$$

und mit dieser Vorgehensweise erhält man insgesamt, daß

$$w_1^k = \frac{1}{N}\left(-\sum_{j=1}^{k-1}\left(b\,p_1^j + a\,p_2^j + bp_3^j\right) - ap_2^k + \sum_{j=k+1}^{N}\left(b\,p_1^j - a\,p_2^j + b\,p_3^j\right)\right), \quad (4.2.10)$$

$$w_2^k = \frac{1}{N}\left(-\sum_{j=1}^{k-1}\left(-a\,p_1^j + a\,p_2^j + ap_3^j\right) + ap_1^k + \sum_{j=k+1}^{N}\left(a\,p_1^j + a\,p_2^j + a\,p_3^j\right)\right), \quad (4.2.11)$$

$$w_3^k = \frac{1}{N}\left(-\sum_{j=1}^{k-1}\left(b\,p_1^j + a\,p_2^j + ap_3^j\right) + \sum_{j=k+1}^{N}\left(b\,p_1^j + a\,p_2^j + a\,p_3^j\right)\right). \quad (4.2.12)$$

Interessanterweise hängt w_3^k überhaupt nicht von p^k ab.

Die Summe auf der rechten Seite von (4.2.8) wird dadurch minimiert, daß man für jedes k separat den entsprechenden Term minimiert. Unser Minimierungsproblem ist daher

$$\min_{q^k \in \mathbb{S}_3} (w^k)^T q^k = \sum_{s=1}^{3} w_s^k\, q_s^k, \qquad k = 1, \dots, N. \quad (4.2.13)$$

Dieses Minimum wird für alle q^k angenommen, bei denen gilt:

$$w_s^k > \min_{t=1,2,3} w_t^k \quad \Rightarrow \quad q_s^k = 0, \qquad s = 1, 2, 3. \quad (4.2.14)$$

Bemerkung 4.2.5. Hat w^k eine eindeutige Minimalkomponente, sagen wir w_s^k, dann ist der Minimierer der Eckpunkt e_s. bei zwei Minimalkomponenten jedes q^k aus der enstprechenden Kante und wenn $w_s^k = \mu 1$ ist, dann kann q^k machen, was es will.

Aus (4.2.14) und Lemma 4.2.3 erhalten wir nun sofort eine Charakterisierung von Optimalstrategien.

Proposition 4.2.6. *$\boldsymbol{p}$ ist genau dann eine Optimalstrategie, wenn*

$$w_s^k(\boldsymbol{p}) > \min_{t=1,2,3} w_t^k(\boldsymbol{p}) \quad \Rightarrow \quad p_s^k = 0, \qquad k = 1, \dots, N. \quad (4.2.15)$$

Für die Bestimmung einer Optimallösung ist es also von entscheidender Bedeutung, zu verstehen, für welches s der Eintrag w_s^k minimal wird. Dafür lohnt es sich, sich die Differenzen der Komponenten von w^k anzusehen[5]:

$$\begin{aligned} w_1^k - w_2^k &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k-1}\left((a-b)p_1^j - (a+b)p_3^j\right) - \frac{a(p_1^k + p_2^k)}{N} \\ &\quad + \frac{1}{N}\sum_{j=k+1}^{N}\left((b-a)(p_1^j + p_3^j) - 2ap_2^j\right), \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

$$w_1^k - w_3^k = \frac{1}{N^2}\left((a-b)\sum_{j=1}^{k-1} p_3^j - ap_2^k + \sum_{j=k+1}^{N}\left((b-a)p_3^j - 2ap_2^j\right)\right), \quad (4.2.17)$$

$$w_2^k - w_3^k = \frac{1}{N^2}\left(\sum_{j=1}^{k-1}\left((a+b)p_1^j + (a-b)p_3^j\right) + ap_1^k + (a-b)\sum_{j=k+1}^{N} p_j^1\right). \quad (4.2.18)$$

[5]Es sind ja gottseidank nur drei.

4.3 Die kontinuierliche Erweiterung

Für die Bestimmung von Optimallösungen sind die Vorzeichenwechsel der Summen in (4.2.16)–(4.2.18) entscheidend, denn daraus bestimmt sich ja, welche Wahrscheinlichkeiten gegebenenfalls auf Null gesetzt werden müssen. Dafür sind die diskreten Folgen nicht wirklich geeignet, deswegen gehen wir zu einer kontinuierlichen Erweiterung über, indem wir die Summe als Riemannsumme auffassen und $N \to \infty$ gehen lassen.

Definition 4.3.1. Die *stückweise stetige* Funktion $\boldsymbol{p} : [0,1] \to \mathbb{S}_3$ bezeichnen wir als *kontinuierliche Erweiterung* der Strategiemenge. Die zugehörige[6] Funktion $w : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definiert sich dann als

$$\begin{aligned} w_1(x) &= -\int_0^x (b\,p_1(t) + a\,p_2(t) + b\,p_3(t))\,dt \\ &\quad + \int_x^1 (b\,p_1(t) - a\,p_2(t) + b\,p_3(t))\,dt, \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

$$\begin{aligned} w_2(x) &= -a \int_0^x (-p_1(t) + p_2(t) + p_3(t))\,dt + a \int_x^1 \underbrace{(p_1(t) + p_2(t) + p_3(t))}_{=1}\,dt \\ &= a\left((1-x) + \int_0^x (p_1(t) - p_2(t) - p_3(t))\,dt\right), \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

$$\begin{aligned} w_3(x) &= -\int_0^x (b\,p_1(t) + a\,p_2(t) + a\,p_3(t))\,dt \\ &\quad + \int_x^1 (b\,p_1(t) + a\,p_2(t) + a\,p_3(t))\,dt \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Bemerkung 4.3.2. Dieser Grenzübergang ist absolut sinnvoll, denn bei realistischen Kartenspielen ist die Anzahl möglicher Blätter ja doch groß. Beim normalen Poker beispielsweise gibt es $\binom{52}{5} = 2598960$ Möglichkeiten.

Das Optimalitätskriterium überträgt sich direkt aus Proposition 4.2.6, nämlich

$$w_s(x) > \min_{t=1,2,3} w_t(x) \quad \Rightarrow \quad p_s(x) = 0, \qquad x \in [0,1]. \tag{4.3.4}$$

Für die Ermittlung der Optimalstrategie stellen wir zuerst fest, daß die Strategie „Sehen“ im vereinfachten Modell nicht sinnvoll ist.

Lemma 4.3.3. *Ist $\boldsymbol{p}$ eine stetige Optimalstrategie, dann ist $p_3 = 0$.*

Beweis: Nehmen wir an, daß $p_3(x) > 0$ für ein $x \in [0,1]$ gilt, dann folgt aus dem Kriterium (4.3.4), daß $w_3(x)$ minimal ist, inbesondere also $w_3(x) \le w_1(x)$ oder

$$\begin{aligned} 0 &\le w_1(x) - w_3(x) \\ &= (a-b)\int_0^x p_3(x)\,dx + (b-a)\int_x^1 p_3(x)\,dx - 2a\int_x^1 p_2(x)\,dx \\ &= (a-b)\left(\int_0^x p_3(x)\,dx - \int_x^1 p_3(x)\,dx\right) - 2a\int_x^1 p_2(x)\,dx. \end{aligned}$$

[6] Als Integral stückweise stetiger Funktionen stetige …

Für $x^* = \sup\{x : p_3(x) > 0\} \in [0,1]$ gilt wegen der Stetigkeit von w ebenfalls $w_3(x^*) \leq w_1(x^*)$, was einen Widerspruch zu

$$\underbrace{(a-b)}_{<0}\Big(\underbrace{\int_0^x p_3(x)\,dx}_{>0} - \underbrace{\int_x^1 p_3(x)\,dx}_{=0}\Big) - \underbrace{2a\int_x^1 p_2(x)\,dx}_{>0} < 0$$

darstellt. □

Bemerkung 4.3.4. Die Interpretation von Lemma 4.3.3 ist, daß „Sehen“ eine überflüssige Strategie ist. Entweder man passt bei schlechten Blättern gleich oder bietet bei guten Blättern direkt hoch. Alles andere bringt nichts.

Da $p_3 = 0$ ist, muß $p_2 = 1 - p_1$ gelten. Ersetzen wir also p_1 durch p, dann vereinfachen sich die Funktionen signifikant; so ist beispielsweise

$$\begin{aligned} w_1(x) &= \int_0^x (-b\,p(t) - a\,(1-p(t)))\;dt + \int_x^1 (b\,p(t) - a\;(1-p(t)))\;dt \\ &= (a-b)\int_0^x p(t)\,dt - ax + (a+b)\int_x^1 p(t)\,dt - a(1-x), \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} w_3(x) &= \int_0^x (-b\,p(t) - a\,(1-p(t)))\;dt + \int_x^1 (b\,p(t) + a\;(1-p(t)))\;dt \\ &= (a-b)\int_0^x p(t)\,dt - ax - (a-b)\int_x^1 p(t)\,dt + a(1-x), \end{aligned}$$

und insgesamt erhalten wir

$$w_1(x) = (a-b)\int_0^x p(t)\,dt + (a+b)\int_x^1 p(t)\,dt - a \tag{4.3.5}$$

$$w_2(x) = 2a\int_0^x p(t)\,dt + a(1-2x) \tag{4.3.6}$$

$$w_3(x) = (a-b)\left(\int_0^x p(t)\,dt - \int_x^1 p(t)\,dt\right) + a(1-2x) \tag{4.3.7}$$

Wegen

$$w_3(x) - w_1(x) = -2a\underbrace{\int_x^1 p(t)\,dt}_{\leq \int_x^1 dt = 1-x} + 2a(1-x) \geq 0$$

gilt jetzt *immer* $w_1 \leq w_3$ und man muss w_3 nicht mehr bei der Minimumsbestimmung berücksichtigen.

Es gibt nun die drei Möglichkeiten

1. $p(x) = 0$, also $p_2(x) = 1 - p(x) = 1$; hier muss $w_2(x) \leq w_1(x)$ gelten,

2. $p(x) = 1$, also $p_2(x) = 0$, das heißt $w_1(x) \leq w_2(x)$,

3. $p(x) \in (0,1)$, hier muss $w_1(x) = w_2(x)$ erfüllt sein.

Betrachten wir also

$$f(x) := w_2(x) - w_1(x) = (a+b)\left(\int_0^x p(t)\,dt - \int_x^1 p(t)\,dt\right) + 2a(1-x),$$

und da

$$f(1) = (a+b)\int_0^1 p(t)\,dt > 0$$

ist, folgt $w_1(1) < w_2(1)$ und $p(1) = 1$ ist zwingend[7]. Ist $p \equiv 1$, also würde man immer hoch bieten, dann ist

$$f(0) = -(a+b)\underbrace{\int_0^1 p(t)\,dt}_{=1} + 2a = a - b < 0,$$

was einen Widerspruch zur Optimalstrategie darstellt, da dann $w_2(0) < w_1(0)$ wäre, also $p(x) = 0$ für $x \in [0,\varepsilon]$ und ein passendes $\varepsilon > 0$.

Seien nun $0 \le x < x' \le 1$ zwei Stellen mit $p(x), p(x') \notin \{0,1\}$. Dann ist $f(x) = f(x') = 0$, also auch

$$\begin{aligned}
0 &= f(x) - f(x') \\
&= (a+b)\left(\int_0^x p(t)\,dt - \int_0^{x'} p(t)\,dt - \int_x^1 p(t)\,dt + \int_{x'}^1 p(t)\,dt\right) + 2a(x'-x) \\
&= (a+b)\left(-\int_x^{x'} p(t)\,dt - \int_x^{x'} p(t)\,dt\right) 2a(x'-x) \\
&= -2(a+b)\int_x^{x'} p(t)\,dt + 2(x'-x),
\end{aligned}$$

und somit ist

$$\frac{1}{x'-x}\int_x^{x'} p(t)\,dt = \frac{a}{a+b}, \tag{4.3.8}$$

der *Durchschnitt* von p auf dem Intervall ist also $0 < \frac{a}{a+b} < 1$ und damit kann p auf diesem Intervall nicht konstant 0 oder 1 sein. Aber es gilt mehr.

Lemma 4.3.5. *Gilt für* $0 \le x < x' \le 1$*, daß* $f(x) = f(x') = 0$*, so ist*

$$p(t) = \frac{a}{a+b}, \qquad t \in [x,x']. \tag{4.3.9}$$

Beweis: Wir zeigen, daß (4.3.9) genau genommen *fast überall* gilt[8]. Angenommen, $[y,y'] \subset [x,x']$ mit $y < y'$ sei ein maximales Intervall, auf dem $p = 0$ oder $p \equiv 1$ ist, also $\int_y^{y'} p(t) \in \{0,1\}$. Dann ist wegen der Maximalität $f(y-\varepsilon) = f(y+\varepsilon)$ für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ und es ist

$$\frac{y'-y+2\varepsilon}{y'-y}\frac{a}{a+b} = \frac{1}{y'-y}\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} p(t)\,dt,$$

und da rechte Seite für $\varepsilon \to 0$ gegen 0 oder 1 konvergiert, die linke aber gegen $(y'-y)\frac{a}{a+b}$, erhalten wir einen Widerspruch. □

Seien

$$x_0 := \min\{x \in [0,1] : p(x) \notin \{0,1\}\}, \qquad x_1 := \max\{x \in [0,1] : p(x) \notin \{0,1\}\},$$

[7] Im Klartext: Mit dem höchsten Blatt zu passen, ist Schwachsinn.

[8] Mengen vom Maß Null könnten dem Integral entgehen.

dann is $p(t) = \frac{a}{a+b}$, $t \in [x_0, x_1]$ und wegen $f(1) > 0$ ist $x_1 < 1$ und $p(t) = 1$, $t \in (x_1, 1]$.

Ausserdem ist $x_0 = 0$. Nehmen wir nämlich an, daß $x_0 > 0$ wäre, dann gäbe es ein Intervall $[0, x_0]$, auf dem p nur die Werte 0 und 1 annimmt. Da[9]

$$f'(x) = (a+b)\,(p(x) + p(x)) - 2a = 2\,((a+b)p(x) - a)$$

positiv für $p(x) = 1$ und negativ für $p(x) = 0$ ist, ist f auf $[0, x_0]$ entweder monoton steigend oder fallend und im Falle $p = 1$ wäre $f < 0$, für $p = 0$ hingegen $f > 0$ auf $[0, x_0]$, was genau das falsche Vorzeichen ist und einen Widerspruch liefert. Wir wissen also:

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{a}{a+b}, & 0 \le t \le x_1, \\ 1 & x_1 < t \le 1, \end{cases} \tag{4.3.10}$$

und es bleibt nur noch die Bestimmung von x_1. Dazu gehen wir zurück zu[10]

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_1) = (a+b)\left(\int_0^{x_1} \frac{a}{a+b}\,dt - \int_{x_1}^1 1\,dt\right) + 2a(1-x_1) \\ &= ax_1 - (a+b)(1-x_1) + 2a(1-x_1) = ax_1 + (a-b)(1-x_1) = bx_1 + a - b, \end{aligned}$$

also

$$x_1 = \frac{b-a}{b} = 1 - \frac{a}{b}.$$

Damit haben wir das Spiel komplett analysiert, wenn man einmal von den Finessen der eigentlich diskreten Situation absieht, die in [26] im Detail erläutert wird.

Satz 4.3.6. *Die Optimialstrategie im einfachen Poker besteht darin, mit Wahrscheinlichkeit*

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{a}{a+b}, & t \le \dfrac{b-a}{b} \\ 1, & t > \dfrac{b-a}{b} \end{cases} \tag{4.3.11}$$

„hoch“ zu bieten und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p(t)$ *„niedrig“ zu bieten und gegebenenfalls zu passen.*

Bemerkung 4.3.7. Selbst das vereinfachte Modell zeigt einige wichtige Eigenschaften, die dieses Pokerspiel interessant machen:

1. Reines Passen gibt es selbst für die schlechtesten Blätter, also $t \approx 0$, nicht. Man sollte immer mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit hoch bieten – genau das ist „Bluffen“.
2. Die Wahrscheinlichkeit $\frac{a}{a+b} < \frac{1}{2}$ mit der man bei eher schlechten Blättern blufft, hängt vom Verhältnis der beiden Einsätze zueinander ab. Je größer das Risiko b/a ist, desto vorsichtiger wird man mit dem Bluffen.
3. Auch der Punkt, ab dem man hoch bietet, also ein Blatt als gut einstuft, hängt von a/b ab, und auch hier gilt: Je höher das Risko, desto vorsichtiger.
4. Man sieht auch sehr schön, daß selbst dieses stark vereinfachte Pokerspiel in der mathematischen Analyse durchaus nichttrivial ist; und dabei kann man noch Symmetrie sehr schön ausnutzen.

[9]Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, gilt auch für stückweise stetige Funktionen, dann für den „integralseitigen“ Grenzwert.

[10]Bisher haben wir immer nur $f(x) - f(x') = 0 - 0 = 0$ betrachtet.

4.4 Eine asymmetrische Variante

Beim vereinfachten Poker der letzten Kapitel haben beide Spieler ihre Strategien *simultan* gewählt, was uns die nicht unwesentliche Vereinfachung eines *symmetrischen* Spiels gebracht hat, die wir auch durchaus genutzt haben. Das entspricht aber nicht wirklich der Natur von Poker, bei dem reihum geboten wird. Daher findet sich in [26, 19.14] auch eine sehr einfache asymmetrische Variante von Poker, die wir uns jetzt ansehen werden, nachdem wir den generellen Prozess der Analyse verstanden haben. Das Spiel ist folgendermaßen:

1. Beide Spieler erhalten ihre jeweiligen Blätter.
2. Spieler 1 bietet entweder niedrig (a) oder hoch (b).
3. Bei einem niedrigen Gebot endet das Spiel und die Blätter werden verglichen[11].
4. Bietet Spieler 1 hoch, so kann Spieler 2 entweder passen (a) oder halten (b), wobei die Blätter verglichen werden.

Beide Spieler haben also zwei Strategien, nämlich „hoch“ und „niedrig“. Die Auszahlungsmatrizen wie in (4.1.3) sind nun

$$\boldsymbol{A}_+ := \begin{bmatrix} b & a \\ a & a \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_0 := \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_- := \begin{bmatrix} -b & a \\ -a & -a \end{bmatrix}. \tag{4.4.1}$$

Damit können wir wieder die erwarte Auszahlung bilden,

$$a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(v_1^j p_1^j + v_2^j p_2^j\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(w_1^k q_1^k + w_2^k q_2^k\right) \tag{4.4.2}$$

mit

$$\begin{aligned} N\, v_1^j &= \sum_{\ell=0}^{j-1}\left(b\, q_1^\ell + a\, q_2^\ell\right) + a\, q_2^j - \sum_{\ell=j+1}^{N}\left(b\, q_1^\ell - a\, q_2^\ell\right), & (4.4.3)\\ N\, v_2^j &= \sum_{\ell=0}^{j-1}\left(a\, q_1^\ell + a\, q_2^\ell\right) - \sum_{\ell=j+1}^{N}\left(a\, q_1^\ell + a\, q_2^\ell\right) & (4.4.4) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} N\, w_1^k &= \sum_{\ell=0}^{k-1}\left(-b\, p_1^\ell - a\, p_2^\ell\right) + \sum_{\ell=j+1}^{N}\left(b\, p_1^\ell + a\, p_2^\ell\right), & (4.4.5)\\ N\, w_2^k &= \sum_{\ell=0}^{j-1}\left(a\, p_1^\ell - a\, p_2^\ell\right) + a\, p_1^k + \sum_{\ell=j+1}^{N}\left(a\, p_1^\ell + a\, p_2^\ell\right). & (4.4.6) \end{aligned}$$

Wir gehen sofort wieder zur kontinuierlichen Version über und setzen $q_2 = 1 - q_1$ ein, so daß wir mit

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \int_0^x \left(b\, q(t) + a(1-q(t))\right)\, dt - \int_x^1 \left(b\, q(t) - a(1-q(t))\right)\, dt \\ &= (b-a)\int_0^x q(t)\, dt - (b+a)\int_x^1 q(t)\, dt + ax + a(1-x) \end{aligned}$$

[11]Die Strategie von Spieler 2 ist hier also irrelevant!

die Funktionen

$$v_1(x) = (b-a)\int_0^x q(t)\,dt - (b+a)\int_x^1 q(t)\,dt + a \tag{4.4.7}$$

$$v_2(x) = a\int_0^x dt - a\int_x^1 dt = a(2x-1) \tag{4.4.8}$$

erhalten. Analog ergibt sich

$$w_1(x) = (a-b)\left(\int_0^x p(t)\,dt - \int_x^1 p(t)\,dt\right) + a(1-2x), \tag{4.4.9}$$

$$w_2(x) = 2a\int_0^x p(t)\,dt + a(1-2x). \tag{4.4.10}$$

Für die Bestimmung der Optimalstrategien[12], betrachten wir nun wieder

$$f_p(x) := v_1(x) - v_2(x) = (b-a)\int_0^x q(t)\,dt - (b+a)\int_x^1 q(t)\,dt + 2a(1-x) \tag{4.4.11}$$

$$f_q(x) := w_1(x) - w_2(x) = (b-a)\int_x^1 p(t)\,dt - (b+a)\int_0^x p(t)\,dt \tag{4.4.12}$$

Nun will Spieler 1 ***maximieren*** und Spieler 2 ***minimieren***, das heißt,

$$p(x) = \begin{cases} = 1, & f_p(x) > 0, \\ = 0, & f_p(x) < 0, \\ \in [0,1], & f_p(x) = 0, \end{cases} \qquad q(x) = \begin{cases} 1, & f_q(x) < 0, \\ 0, & f_q(x) > 0, \\ \in [0,1], & f_q(x) = 0. \end{cases}$$

Da

$$\begin{aligned} & f_q(x') - f_q(x) \\ &= (b-a)\left(\int_{x'}^1 p(t)\,dt - \int_{x'}^1 p(t)\,dt\right) - (b+a)\left(\int_0^{x'} p(t)\,dt - \int_0^x p(t)\,dt\right) \\ &= (a-b)\int_x^{x'} p(t)\,dt - (b+a)\int_x^{x'} p(t)\,dt = -2b\int_x^{x'} p(t)\,dt < 0 \end{aligned}$$

ist f_q monoton fallend, d.h., es gibt $0 \le x_0 \le x_1 \le 1$ so daß

$$q(x) \begin{cases} = 0, & 0 \le x < x_0, \\ \in [0,1], & x_0 \le x \le x_1, \\ = 1, & x_1 < x \le 1, \end{cases}$$

und es gilt

$$0 = f_q(x) = f_q(x) - f_q(x_0) = -2b\int_{x_0}^x p(t)\,dt, \qquad x \in [x_0, x_1],$$

also $p = 0$ auf $[x_0, x_1]$. Nun ist

$$f_p(x) = b\left(\int_0^x q(t)\,dt - \int_x^1 q(t)\,dt\right) - a\int_0^1 q(t)\,dt + 2a(1-x),$$

[12]Das Spiel ist nicht mehr symmetrisch, jetzt wird es also interessant

also, für $x < x'$,

$$f_p(x') - f_p(x) = 2b \int_x^{x'} q(t)\,dt - 2a(x'-x) \tag{4.4.13}$$

und insbesondere

$$f_p(x) - f_p(0) = 2b \underbrace{\int_0^x q(t)\,dt}_{=0} - 2ax = -2ax < 0, \qquad x \in [0, x_0],$$

zeigt, daß f_p auf diesem Intervall strikt monoton fallend ist. Ist nun $f_p(0) \le 0$, dann wäre $f_q(x) < 0$ für $x \in (0, x_1]$ und damit

$$f_q(x_1) = (b-a) \int_{x_1}^1 p(t)\,dt \ge 0, \tag{4.4.14}$$

wobei Gleichheit nur möglich wäre, wenn $p \equiv 0$ wäre, was aber wegen $f_p(1) = (b - a) \int q(t)\,dt > 0$ ein Widerspruch ist. Und „>" in (4.4.14) widerspricht der Definition von x_0. Also ist

$$0 < f_p(0) = 2a - (b+a) \int_0^1 q(t)\,dt,$$

und ausserdem ist $p = 1$ auf einem Intervall $[0, y_0]$ mit $y_0 \in [0, x_0]$. Zusammengefasst gibt es also ein $y_0 \in [0, x_0]$, so daß

$$p(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < y_0, \\ 0, & y_0 \le x \le x_0. \end{cases}$$

Ebenso liefert

$$f_p(x) - f_p(x_1) = 2b \underbrace{\int_{x_1}^x q(t)\,dt}_{=x-x_1} - 2a(x - x_1) = 2(b-a)(x-x_1) > 0, \qquad x \in [x_1, 1],$$

daß f_p auf $[x_1, 1]$ strikt monoton steigend ist, und da $f_p(1) = (b-a)\int q(t)\,dt > 0$ gibt es daher auch ein $y_1 \in [x_1, 1]$, so daß $f_p(x) < 0$ für $x < y_1$ und $f_p(x) > 0$ für $x > y_1$.

Damit haben wir die Strategie p verstanden, nämlich

$$p(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < y_0, \\ 0, & y_0 \le x \le y_1, \\ 1, & y_1 < x \le 1. \end{cases} \tag{4.4.15}$$

Bemerkung 4.4.1. Erstaunlicherweise haben wir auch hier wieder einen Bluff: während Spieler 1 auf mittlere Blätter niedrig und auf hohe Blätter hoch bietet, blufft er bei ganz besonders schlechten Blättern und bietet dort ebenfalls hoch.

Bleibt noch die Bestimmung von y_0, y_1. Dazu berechnen wir zuerst einmal

$$f_q(x) = (b-a) \int_0^1 p(t)\,dt = (b-a)(y_0 + 1 - y_1)$$

und erhalten aus

$$\begin{aligned} 0 &= f_q(x_0) = f_q(0) - 2b \int_0^{x_0} p(t)\,dt = f_q(0) - 2b \int_0^{y_0} dt = (b-a)(y_0 + 1 - y_1) - 2b\,y_0 \\ &= (b-a)(1-y_1) - (b+a)y_0, \end{aligned}$$

daß

$$\frac{y_0}{1-y_1} = \frac{b-a}{b+a}. \tag{4.4.16}$$

Für $x \in [y_0, y_1]$ ist f_q konstant:

$$\begin{aligned} f_q(x) &= (b-a)\int_x^1 p(t)\,dt - (b+a)\int_0^x p(t)\,dt \\ &= (b-a)\int_{y_1}^1 p(t)\,dt - (b+a)\int_0^{y_0} p(t)\,dt = (b-a)(1-y_1) - (b+a)y_1 = 0, \end{aligned}$$

und da dieser konstante Bereich genau $[x_0, x_1]$ ist, muß also $y_0 = x_0$ und $y_1 = x_1$ sein. Da, aus Stetigkeitsgründen, $f_p(x_0) = f_p(x_1) = 0$ ist, erhalten wir aus (4.4.13), daß

$$0 = f_p(x_1) - f_p(x_0) = 2b\int_{x_0}^{x_1} q(t)\,dt - 2a(x_1 - x_0),$$

also wieder der Mittelwert[13]

$$\frac{1}{y_1 - y_0}\int_{y_0}^{y_1} q(t)\,dt = \frac{a}{b} \tag{4.4.17}$$

und somit auch[14]

$$\int_0^1 q(t)\,dt = \int_{y_0}^{y_1} q(t)\,dt + \int_{y_1}^1 dt = \frac{a}{b}(y_1 - y_0) + (1 - y_1). \tag{4.4.18}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= f_p(y_1) = (b-a)\int_0^{y_1} q(t)\,dt - (b+a)\int_{y_1}^1 q(t)\,dt + 2a(1-y_1) \\ &= (b-a)\frac{a}{b}(y_1-y_0) - (b+a)(1-y_1) + 2a(1-y_1) = (b-a)\left(\frac{a}{b}(y_1-y_0) - (1-y_1)\right), \end{aligned}$$

also

$$\frac{y_1 - y_0}{1 - y_1} = \frac{b}{a}. \tag{4.4.19}$$

Aus (4.4.16) und (4.4.19) erhalten wir schliesslich[15]

$$\frac{b}{a}(1-y_1) = y_1 - y_0 = y_1 - \frac{b-a}{b+a}(1-y_1),$$

also

$$y_1 = \left(\frac{b}{a} + \frac{b-a}{b+a}\right)(1-y_1) = \frac{b^2 + 2ab - a^2}{a(b+a)}(1-y_1),$$

---

[13] Es gilt auch, wie in [26] angegben, daß

$$\frac{1}{y_1 - y}\int_y^{y_1} q(t)\,dt \ge \frac{a}{b}, \qquad y \in [y_0, y_1],$$

die durchschnittliche Wahrscheinlichkeit, hoch zu bieten, wächst also mit der Qualität des Blattes.

[14] Zur Erinnerung: $q = 0$ auf $[0, y_0]$ und $q = 1$ auf $[y_1, x]$.

[15] Wir müssen er halt noch ausrechnen …

und damit

$$y_1 = \frac{\frac{b^2+2ab-a^2}{a(b+a)}}{1+\frac{b^2+2ab-a^2}{a(b+a)}} = \frac{\frac{b^2+2ab-a^2}{a(b+a)}}{\frac{b^2+3ab}{a(b+a)}} = \frac{b^2+2ab-a^2}{b^2+3ab}, \qquad y_0 = \frac{ab-a^2}{b^2+3ab}. \tag{4.4.20}$$

Damit haben wir die Optimalstrategien wirklich komplett bestimmt. Bleibt nur noch der Wert des Spieles, der sich mit Hilfe der Optimalstrategien berechnen lässt, nämlich nach (4.4.15) als

$$v = \int_0^1 \left(v_1(x)p(x) + v_2(x)(1-p(x))\right)\,dx = \int_0^{y_0} v_1(x)\,dx + \int_{y_0}^{y_1} v_2(x)\,dx + \int_{y_1}^1 v_1(x)\,dx.$$

Für das erste Integral verwenden wir (4.4.18), die Tatsache, daß $q = 0$ auf $[0, y_0]$, und (4.4.16),

$$\begin{aligned}
\int_0^{y_0} v_1(x)\,dx &= (b-a)\int_0^{y_0} \underbrace{\int_0^x q(t)\,dt}_{=0}\,dx - (b+a)\int_0^{y_0} \underbrace{\int_x^1 q(t)\,dt}_{=\int_0^1 q(t)\,dt}\,dx + ay_0 \\
&= -(b+a)y_0\left(\frac{a}{b}(y_1-y_0) + (1-y_1)\right) + ay_0 \\
&= -\frac{a(b+a)}{b}y_0(y_1-y_0) - (b+a)y_0(1-y_1) + ay_0 \\
&= -\frac{a(b-a)}{b}(y_1-y_0)(1-y_1) - (b+a)y_0(1-y_1) + ay_0
\end{aligned}$$

das zweite Integral ist einfach

$$\int_{y_0}^{y_1} v_2(x)\,dx = a\int_{y_0}^{y_1}(2x-1)\,dx = a\left(y_1^2 - y_1 - y_0^2 + y_0\right) = a\left(y_1+y_0-1\right)\left(y_1-y_0\right)$$

und das dritte Integral ist, wieder unter Berücksichtigung von (4.4.18),

$$\int_{y_1}^1 v_1(x)\,dx = (b-a)\int_{y_1}^1\int_0^x q(t)\,dt dx - (b+a)\int_{y_1}^1 \underbrace{\int_x^1 q(t)\,dt}_{=1-x}\,dx + a(1-y_1)$$

$$\begin{aligned}
&= (b-a)\int_{y_1}^1\left(\int_{y_0}^{y_1} q(t)\,dt + \int_{y_1}^x q(t)\,dt\right)dx - (b+a)\int_{y_1}^1 (1-x)\,dx + a(1-y_1) \\
&= (b-a)\left((1-y_1)\frac{a}{b}(y_1-y_0) + \int_{y_1}^1 (x-y_1)\,dx\right) - (b+a)\left(\frac{1}{2} - y_1 + \frac{y_1^2}{2}\right) + a(1-y_1) \\
&= \frac{a(b-a)}{b}(y_1-y_0)(1-y_1) + (b-a)\underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{y_1^2}{2} - y_1(1-y_1)\right)}_{=\frac{1}{2}-y_1+\frac{y_1^2}{2}} - (b+a)\left(\frac{1}{2} - y_1 + \frac{y_1^2}{2}\right) \\
&\quad + a(1-y_1) \\
&= \frac{a(b-a)}{b}(y_1-y_0)(1-y_1) - a(1-2y_1+y_1^2) + a(1-y_1) \\
&= \frac{a(b-a)}{b}(y_1-y_0)(1-y_1) + ay_1(1-y_1).
\end{aligned}$$

Wenden wir (4.4.19), genauer $a(y_1 - y_0) = b(1 - y_1)$, auf das zweite Integral an, dann summieren sich die drei Integrale zu

$$\begin{aligned} v &= ay_0 - (1 - y_1)\left((b + a)y_0 - b(y_1 + y_0 - 1) - ay_1\right) \\ &= ay_0 - (1 - y_1)\left(a(y_0 - y_1) + b(y_1 - 1)\right) = ay_0 - (1 - y_1)a\left(y_0 - y_1 + y_1 - y_0\right) = ay_0. \end{aligned}$$

Damit können wir das asymmetrische Poker vollständig beschreiben.

Satz 4.4.2. *Im asymmetrischen Poker hat Spieler 1 genau eine Optimalstrategie, nämlich*

$$p(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < y_0 \\ 0, & y_0 \le x \le y_1, \\ 1, & y_1 < x \le 1, \end{cases}$$

für Spieler 2 ist jede Strategie optimal, für die gilt

$$q(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < y_0, \\ 1, & y_1 < x \le 1, \end{cases} \qquad \frac{1}{y_1 - y_0} \int_{y_0}^{y_1} q(t)\,dt = \frac{a}{b},$$

wobei y_0, y_1 *die Werte aus* (4.4.20) *sind. Das Spiel hat den positiven Wert* ay_0.

Bemerkung 4.4.3 (Asymmetrisches Pokern).

1. Wieder besteht die Strategie von Spieler 1 aus hoch bieten bei guten Blättern, enthält aber eben auch einen Bluff-Anteil, erstaunlicherweise bei den ganz schlechten Blättern.

2. Die Strategie von Spieler 2 ist konservativer: Bei schlechten Blättern wird gepasst, bei guten hoch geboten und bei mittelmäßigen zufällig, wobei die Wahrscheinlichkeit für hohe Gebote bei besseren Blättern eher höher wird.

3. Die Bereiche, in denen sich das Verhalten unterscheidet, hängen wieder von a und b ab, wobei (4.4.20) eher nicht aussagekräftig ist. Mehr sieht man in (4.4.16), das sagt, daß die Längenverhältnisse zwischen den beiden Bluffbereichen wie $\frac{b-a}{b+a}$ verhalten. Ist a also klein im Vergleich zu b, also das Spiel riskant, so wird man etwa so oft bluffen wie hoch bieten, sind a und b eher gleich groß, dann lohnt sich das Bluffen nicht. Allerdings bestimmt das Verhältnis $\frac{b}{a}$ auch, ob man überhaupt hoch bietet, und mit zunehmendem Risiko wird der Bereich niedriger Gebote von Spieler 1 dominant werden.

4. Insbesondere ist

$$y_0 = \frac{a/b - (a/b)^2}{1 + 3a/b} < \frac{a}{b}, \qquad 1 - y_1 = \frac{ab + a^2}{b^2 + 3ab} < \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2},$$

das Risiko beeinflusst also auch die absolute Größe der Bereiche, in denen Spieler 1 blufft und sie sind beide von der Größenordnung $\frac{a}{b}$.

5. Die kontinuierliche Strategie ist eine Vereinfachung, für diskrete Blätter gibt es subtile Effekte [26].

6. Das Spiel ist *nicht* fair, sondern hat positiven Wert und bevorzugt Spieler 1. [26] führt das darauf zurück, daß Spieler 1 hier die Iniative hat[16], aber generell ist das bei Bietespielen wie auch Skat wohl der Grund, warum die Anfangsposition rotiert.

[16] Wäre zufällig $v < 0$, dann könnte man das damit begründen, daß Spieler 2 über mehr Information verfügt.

7. Die Bestimmung von Optimalstrategien ist für nichtsymmetrische Spiele deutlich aufwendiger, weil die Strategien ***p und q*** und ihre Interaktion im Spiel betrachtet werden müssen.

Machen wir zum Schluss noch ein Beispiel „mit Zahlen".

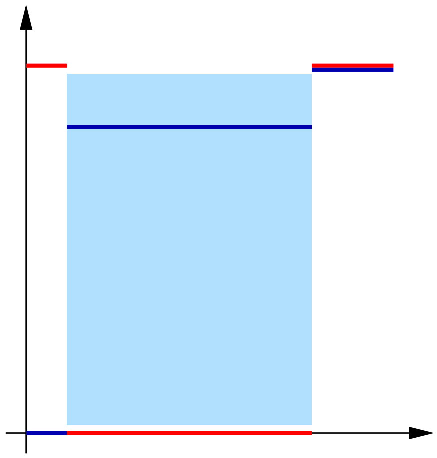

Abbildung 4.4.1: Die Optimalstrategien für Spieler 1 *(rot)* und Spieler 2 *(blau)*, wobei sich die Strategie von Spieler 2 im hellblau hinterlegten Bereich relativ frei entfalten darf.

Beispiel 4.4.4. Für $a = 1$ und $b = 2$ ist

$$y_0 = \frac{1}{10}, \qquad y_1 = \frac{7}{10}, \qquad v = \frac{1}{10}.$$

Die einfachste, da konstante, Strategie für Spieler 2 ergibt sich durch

$$\frac{3}{5}q = \left(\frac{7}{10} - \frac{1}{10}\right) q = \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad q = \frac{5}{6},$$

was eine recht große Wahrscheinlichkeit ist, hoch zu bieten. Die Graphen der Strategien sind in Abb. 4.4.1 dargestellt.

Übung 4.4.1 Verifizieren Sie, daß die erwartete Auszahlung der beiden Strategien aus Beispiel 4.4.4 dem Wert des Spieles entspricht und die beiden Strategien daher wirklich optimal sind. ◇

Verhandlungsspiele, Gleichgewichte und die Nutzenfrage | 5

Contrariwise, [...] if it was so, it might be; and if it were so, it would be; but as it isn't, it ain't. That's logic.

(L. Carroll, *Through the looking glass*)

Jetzt wird es aber langsam Zeit, sich in das Reich der Mehrpersonenspiele aufzumachen. Da man ja jedes n–Personen–Nichtnullsummenspiel auch als $n+1$–Personen–Nullsummenspiel schreiben kann, indem man einen weiteren Spieler einführt, der nichts anderes zu tun hat als die Auszahlungen auszugleichen, ist es sicherlich ein sehr vernünftiger erster Schritt, Nichtnullsummenspiele für zwei Spieler zu betrachten und sich einmal anzusehen, was hier an neuen Konzepten nötig wird. Und das wird eine ganze Menge sein.

5.1 Verhandlungen und die Vorteile der Kooperation

Wir betrachten jetzt also Zweipersonen–Spiele, die auf *zwei* Auszahlungsmatrizen $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ basieren, welche nicht mehr unbedingt die Nullsummenbedingung $\boldsymbol{A}_1 = -\boldsymbol{A}_2$ erfüllen[1]; spielen die beiden Spieler nun ihre gemischten Strategien $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$, dann ist die zu erwartende Auszahlung der Vektor

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) := \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{q} \end{bmatrix}. \tag{5.1.1}$$

Die Ziele der Spieler sind jetzt nicht mehr automatisch gegenläufig, denn Spieler 1 will $a_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ möglichst groß machen, Spieler 2 hingenen $a_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$. Zur Illustration eignet sich das folgende Beispiel aus [20] sehr gut.

Beispiel 5.1.1. Wir betrachten das Spiel zu den Auszahlungsmatrizen

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

die wir auch zur *Auszahlungstabelle*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} (2,1) & (-1,-1) \\ (-1,-1) & (1,2) \end{bmatrix}$$

kombinieren können.

[1] Wir wollen das nicht a priori ausschließen, eine vernünftige Erweiterung der Theorie sollte die Nullsummenspiele natürlich enthalten und es ist immer gut, sich zu überlegen, was die allgemeinere Theorie für diesen Spezialfall bedeutet.

Die beiden Spieler können sich nun zuerst einmal auf den Standpunkt stellen, daß sie *unabhängig voneinander* gemischte Strategien $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ spielen und diese dann wie gehabt auch unabhängig voneinander optimieren könnten. Damit kann dann aber auch nur eine bestimmte Menge von Auszahlungen realisiert werden.

Definition 5.1.2. Der *Gewinnbereich* $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ zum Spiel $(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2)$ ist die Menge

$$\Gamma = \Gamma(\boldsymbol{A}) = \Gamma(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2) = \begin{bmatrix} \mathbb{S}_m^T \boldsymbol{A}_1 \mathbb{S}_n \\ \mathbb{S}_m^T \boldsymbol{A}_2 \mathbb{S}_n \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{q} \end{bmatrix} \; : \; \boldsymbol{p} \in \mathbb{S}_m, \; \boldsymbol{q} \in \mathbb{S}_n \right\}.$$

Versuchen wir doch einmal, den Gewinnbereich $\Gamma(\boldsymbol{A})$ zu Beispiel 5.1.1 zu bestimmen. Für $\boldsymbol{p} = (p, 1-p)$ und $\boldsymbol{q} = (q, 1-q)$ erhalten wir dann die Punkte

$$\begin{bmatrix} 2pq - [p(1-q) + q(1-p)] + (1-p)(1-q) \\ pq - [p(1-q) + q(1-p)] + 2(1-p)(1-q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5pq - 2p - 2q + 1 \\ 5pq - 3p - 3q + 2 \end{bmatrix}$$

Mit anderen Worten: Γ ist das Bild des Einheitsquadrats $[0,1]^2$ unter der *bilinearen* Abbildung

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} xy - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} (x+y) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

die die vier Seiten des Quadrats auf

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}(x,0) &= -\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, & x \in [0,1], \\ \boldsymbol{f}(0,y) &= -\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, & y \in [0,1], \\ \boldsymbol{f}(x,1) &= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, & x \in [0,1], \\ \boldsymbol{f}(1,y) &= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, & y \in [0,1], \end{aligned}$$

abbildet. Das sind nur zwei Randkurven von Γ, nämlich die Streckenzüge, die $(-1,-1)$ mit $(2,1)$ und $(1,2)$ verbinden; die verbleibende Randkurve bekommen wir[2] durch

$$\boldsymbol{f}(x,x) = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} x^2 - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad x \in [0,1],$$

eine Parabel, die $(1,2)$ mit $(2,1)$ verbindet und deren Mittelpunkt, $x = \frac{1}{2}$, zur Auszahlung

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

gehört. Der zugehörige Gewinnbereich $\Gamma(\boldsymbol{A})$ ist in Abb. 5.1.1 zu sehen und er ist offensichtlich *keine* konvexe Menge. Trotzdem spielt Konvexität natürlich auch hier wieder eine wesentliche Rolle, und um uns darüber klarzuwerden, werfen wir einmal einen Blick auf den allgemeinen Fall.

[2]Das ist ein „educated guess", aber geometrisch nicht so ganz abwegig, wenn man bedenkt, daß die beiden Kanten zu $[x,0]$ und $[0,y]$ aufeinander gefaltet werden.

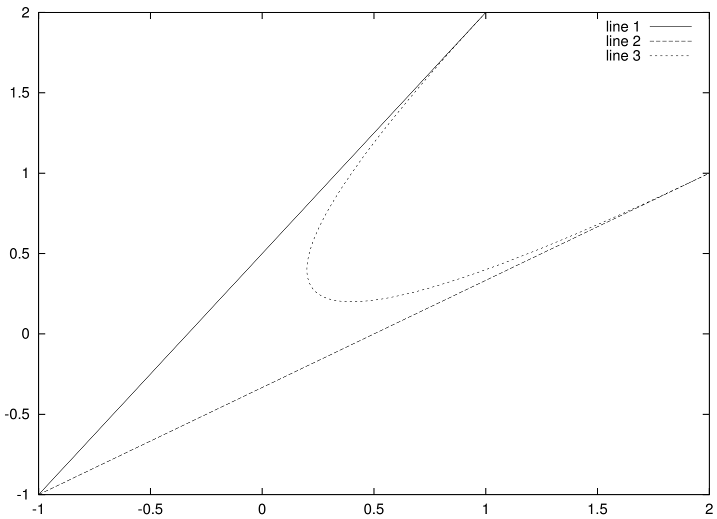

Abbildung 5.1.1: Der Gewinnbereich $\Gamma(\boldsymbol{A})$ zu Beispiel 5.1.1.

Schreiben wir generell $\boldsymbol{A}_\ell = \left[a_{jk}^\ell \,:\, j,k\right]$, $\ell = 1,2$, dann bemerken wir zuerst einmal, daß für jedes $\boldsymbol{p} \in \mathbb{S}_m$ und $\boldsymbol{q} \in \mathbb{S}_n$ der Punkt $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ eine *Konvexkombination* der Punkte $\boldsymbol{a}_{jk} = \begin{bmatrix} a_{jk}^1 \\ a_{jk}^2 \end{bmatrix}$, $j = 1,\dots,m$, $k = 1,\dots,n$, ist:

$$\boldsymbol{a}\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\right) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} a_{jk}^1 \\ a_{jk}^2 \end{bmatrix} p_j q_k =: \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \boldsymbol{a}_{jk}\, \alpha_{jk} \tag{5.1.2}$$

mit $\alpha_{jk} \ge 0$ und

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} \quad = \quad \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n p_j\, q_k = \underbrace{\sum_{j=1}^m p_j}_{=1} \underbrace{\sum_{k=1}^n q_k}_{=1} = 1.$$

Definition 5.1.3. Die *konvexe Hülle* $[\![\Omega]\!]$ einer Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ist definiert als

$$[\![\Omega]\!] := \bigcup_{n=1}^\infty \bigcup_{\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n \in \Omega} [\![\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n]\!]. \tag{5.1.3}$$

Lemma 5.1.4. *Für* $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{A}_\ell = \left[a_{jk}^\ell \,:\, j,k\right]$, $\ell = 1,2$, *ist*

$$[\![\Gamma\left(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2\right)]\!] = \left[\!\!\left[\begin{bmatrix} a_{jk}^1 \\ a_{jk}^2 \end{bmatrix} \,:\, \begin{matrix} j = 1,\dots,m \\ k = 1,\dots,n \end{matrix} \right]\!\!\right] =: \Omega(\boldsymbol{A}). \tag{5.1.4}$$

Beweis: Die Inklusion $\subseteq$ haben wir bereits in (5.1.2) gezeigt und da mit $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{e}_j$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{e}_k$ auch $\boldsymbol{a}_{jk} \in \Gamma(\boldsymbol{A})$ ist, folgt mit

$$[\![\Gamma(\boldsymbol{A})]\!] \supseteq [\![\boldsymbol{a}_{jk} \,:\, j,k]\!]$$

auch die umgekehrte Inklusion. $\square$

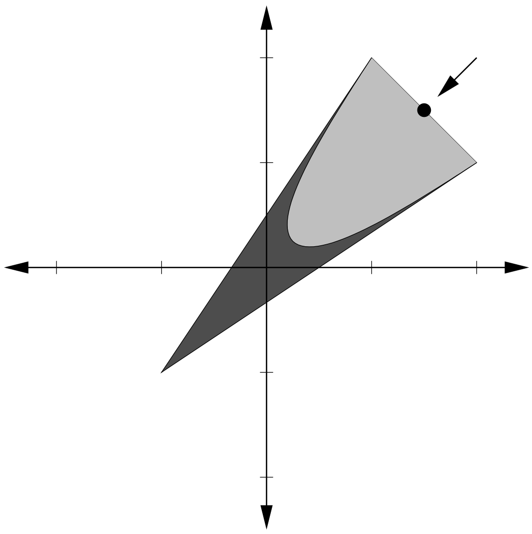

Abbildung 5.1.2: Der Gewinnbereich $\Gamma(\boldsymbol{A})$ (dunkelgrau) und seine konvexe Hülle $\Omega(\boldsymbol{A})$, hinzu kommt der hellgraue Part. Ein besonders interessanter Punkt dieser konvexen Hülle ist offenbar der eingezeichnete Punkt $(3/2, 3/2)$.

Fassen wir zusammen: $\Gamma(\boldsymbol{A})$ ist *immer* eine Teilmenge des konvexen Polyeders $\Omega(\boldsymbol{A}) = [\![\Gamma(\boldsymbol{A})]\!]$, aber im allgemeinen wird $\Gamma(\boldsymbol{A}) \subset \Omega(\boldsymbol{A})$ mit $\Gamma(\boldsymbol{A}) \neq \Omega(\boldsymbol{A})$ gelten, siehe Abb. 5.1.1. Insbesondere enthält $\Omega(\boldsymbol{A}) \setminus \Gamma(\boldsymbol{A})$ Punkte, die für *beide* Spieler *gleichzeitig* sehr akzeptable Auszahlungswerte darstellen, insbesondere den Punkt $(3/2, 3/2)$ in Abb. 5.1.2. Und genau diesen Punkt kann man mit *Verhandlungen* erreichen: Beide Spieler einigen sich *vor* dem Spiel darauf, die Strategien $p = 0, q = 1$ oder $p = 1, q = 0$ mit jeweils Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zu spielen und entscheiden dann beispielsweise durch einen gemeinsamen Münzwurf, welche der beiden Strategien zu spielen ist. Der Erwartungswert dieser *kooperativen* Methode ist dann

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

und das ist wesentlich besser, als wenn beide Spieler die Strategie $p = q = \frac{1}{2}$ spielen würden, was ja nur die Auszahlung $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ lieferte.

Definition 5.1.5. Ein *Verhandlungsergebnis* besteht aus einer endlichen Anzahl von Strategien $\left(\boldsymbol{p}_j, \boldsymbol{q}_j\right) \in \mathbb{S}_m \times \mathbb{S}_n$, $j = 0, \dots, N$ und einem Wahrscheinlichkeitsvektor $\alpha \in \mathbb{S}_N$, was zu der erwarteten Auszahlung

$$\boldsymbol{a}^* = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_j^T \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{q}_j \\ \boldsymbol{p}_j^T \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{q}_j \end{bmatrix} \in \Omega\left(\boldsymbol{A}\right)$$

führt.

Mit Hilfe von Verhandlungsergebnissen können wir also für unsere weitere Theorie immer annehmen, daß beide Spieler ihre Auszahlungen immer in $\Omega(\boldsymbol{A})$ suchen können, denn jeder Punkt aus der konvexen Hülle $\Omega(\boldsymbol{A}) = [\![\Gamma(\boldsymbol{A})]\!]$ entspricht ja nun einem Verhandlungsergebnis. Nun gibt es aber auch noch ein Resultat, das uns sagt, daß wir gar nicht so viele Strategien brauchen, um zu so einem Verhandlungsergebnis zu kommen.

Satz 5.1.6. *Zu jedem Punkt $\boldsymbol{a} \in \Omega(A) \subset \mathbb{R}^2$ gibt es jeweils* **drei** *reine*[3] *Strategien*

$$\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \mathbb{S}_m, \qquad \boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2 \in \mathbb{S}_m,$$

sowie $\alpha \in \mathbb{S}_3$, so daß

$$\boldsymbol{a} = \sum_{j=0}^{2} \alpha_j \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_j^T A_1 \boldsymbol{q}_j \\ \boldsymbol{p}_j^T A_2 \boldsymbol{q}_j \end{bmatrix}$$

ist.

Was sich hinter diesem Resultat verbirgt, ist eine kleine Beobachtung aus der konvexen Analysis.

Proposition 5.1.7. *Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kann jeder Punkt $\boldsymbol{x} \in [\![\Omega]\!]$ in der Form*

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=0}^{r} \alpha_j \boldsymbol{x}_j, \qquad \boldsymbol{x}_j \in \Omega, \quad \alpha \in \mathbb{S}_r^\circ, \quad r \le n, \tag{5.1.5}$$

geschrieben werden.

Bemerkung 5.1.8. Zwei Dinge sind bei dieser Proposition wichtig: Jeder Punkt aus $[\![\Omega]\!]$ kann als *strikte* Konvexkombination[4] von *höchstens* $n+1$ Punkten geschrieben werden, wobei n die Raumdimension ist.

Beweis von Proposition 5.1.7: Nach der Definition (5.1.3) der konvexen Hülle kann $\boldsymbol{x} \in \Omega$ als

$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_0 \dots \boldsymbol{x}_r]\, \alpha = \sum_{j=0}^{r} \alpha_j \boldsymbol{x}_j, \qquad \alpha \in \mathbb{S}_r, \tag{5.1.6}$$

für ein $r \in \mathbb{N}$ geschrieben werden. Als erstes lassen wir mal alle Punkte mit $\alpha_j = 0$ weg und erhalten so eine strikte Konvexkombination, $\alpha \in \mathbb{S}_r^\circ$. Gibt es verschiedene Möglichkeiten, $\boldsymbol{x}$ in der Form (5.1.6) darzustellen, dann wählen wir eine Darstellung, bei der die Anzahl r der Terme minimal wird und behaupten, daß $r \le n$ sein muß.

Wäre nämlich $r > n$, dann sind die $r > n$ Vektoren $\boldsymbol{y}_j := \boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_0$, $j = 1, \dots, r$, linear *abhängig* und es gibt $\beta \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$, so daß

$$\begin{aligned} \boldsymbol{0} &= [\boldsymbol{y}_1 \dots \boldsymbol{y}_r]\, \beta = \sum_{j=1}^{r} \beta_j \boldsymbol{y}_j = \sum_{j=1}^{r} \beta_j \left(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_0\right) = \sum_{j=1}^{r} \beta_j \boldsymbol{x}_j - \left(\sum_{j=1}^{r} \beta_j \right) \boldsymbol{x}_0 \\ &=: \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \boldsymbol{x}_j = [\boldsymbol{x}_0 \dots \boldsymbol{x}_r]\, \gamma, \qquad \sum_{j=0}^{r} \gamma_j = 0. \end{aligned}$$

Dabei ist $\gamma_j \neq 0$ für mindestens ein $j \in \{0, \dots, n\}$. Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist dann aber

$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_0 \dots \boldsymbol{x}_r]\,(\alpha + \lambda\gamma) =: [\boldsymbol{x}_0 \dots \boldsymbol{x}_r]\, \alpha',$$

und mit $\lambda = -\frac{\alpha_j}{\gamma_j}$ ist $\alpha'_j = 0$, also hat α' echt weniger von 0 verschiedene Komponenten als α, was der Minimalität von r widerspricht. □

Beweis von Satz 5.1.6: Da $\Omega(A)$ die konvexe Hülle der $\boldsymbol{a}_{jk}$ sind, die man über die reinen Strategien $\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k$ erhält, brauchen wir nur noch Proposition 5.1.7 anzuwenden, um zu sehen, daß wir maximal drei dieser Punkte benötigen, um $\boldsymbol{a}$ zu kombinieren. □

[3] „Rein“ bedeutet, daß jede dieser Strategien einem Einheitsvektor entspricht.
[4] Also als Konvexkombination, bei der alle Komponenten strikt positiv sind.

5.2 Nash–Gleichgewicht

Wenn wir jetzt also unsere Verhandlungen durchführen, was wird dann wohl die Lösung sein? Auf welchen Punkt sollen sich die beiden Spieler einigen, was ist die „faire“ Verhandlungslösung? Ein Vorschlag dafür wurde 1950 von Nash [22] gemacht. Für diesen Ansatz folgen wir [20] und beginnen mit einem *Status Quo* $\boldsymbol{a}_0 = (u_0, v_0) \in \Omega = \Omega(\boldsymbol{A})$. Das Konzept der besten Verhandlungslösung basiert auf der naheliegenden Idee, daß beide Spieler den Status Quo verwerfen werden, wenn es $\boldsymbol{a} = (u, v) \ge \boldsymbol{a}_0$ gibt, denn in diesem Fall könnten sich ja beide Spieler simultan verbessern und es gibt keinen rationalen Grund[5], warum sie auf $\boldsymbol{a}_0$ beharren sollten.

Definition 5.2.1. Die *Nash–Lösung* $\boldsymbol{a}^* = (u^*, v^*) \ge \boldsymbol{a}_0$ des Verhandlungsproblems ist definiert durch

$$(u^* - u_0)\,(v^* - v_0) \ge (u - u_0)\,(v - v_0)\,, \qquad \boldsymbol{a}_0 \le \boldsymbol{a} = (u, v) \in \Omega(\boldsymbol{A}). \tag{5.2.1}$$

Bemerkung 5.2.2. Die zentrale Bedeutung des *Status Quo* $\boldsymbol{a}_0$ besteht darin, daß *keiner* der beiden Spieler weniger als seinen Anteil an $\boldsymbol{a}_0$ akzeptieren kann. Der Status Quo ist Bestandteil des Spiels und nicht Bestandteil der Verhandlungslösung, er entzieht sich also dem Einfluss der Spieler. Allerdings sorgt er dafür, daß nur Auszahlungen aus

$$\Omega_{\ge \boldsymbol{a}_0} := \Omega \cap \{\boldsymbol{a} : \boldsymbol{a} \ge \boldsymbol{a}_0\} \tag{5.2.2}$$

möglich sind. Besteht diese Menge nur aus $\boldsymbol{a}_0$, dann ist die Verhandlung trivial und der Status Quo ist die einzige Lösung.

Bemerkung 5.2.3. Es gibt noch einen zweiten Spezialfall, nämlich den, daß $u = u_0$ oder $v = v_0$ für alle $(u, v) \in \Omega_{\ge \boldsymbol{a}_0}$ gilt, daß es also für mindestens einen der beiden Spieler gar keine Optionen gibt. In diesem Fall hat (5.2.1) die triviale Form $0 \ge 0$ und legt die andere Variable nicht fest. Die wählen wir in diesem Fall einfach so groß wie möglich, das heißt,

1. wenn $u = u_0$ für alle $(u, v) \in \Omega_{\ge \boldsymbol{a}_0}$, dann setzen wir $u^* = u_0$ und $v^* = \max\{v : (v, u_0) \in \Omega$,
2. wenn $v = v_0$ für alle $(u, v) \in \Omega_{\ge \boldsymbol{a}_0}$, dann ergibt sich analog $v^* = v_0$ und $u^* = \max\{u : (v_0, u) \in \Omega$.

Nach Ausschluss aller Spezialfälle können wir im weiteren annehmen, daß $\boldsymbol{a}_0 \in \Omega(\boldsymbol{A})^\circ$, so daß es mindestenst ein[6] $\boldsymbol{a} \in \Omega(\boldsymbol{A})$ mit $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{a}_0$ gibt, so daß auch $\boldsymbol{a}^* > \boldsymbol{a}_0$ sein muss.

Die Nash–Lösung hat aber auch eine interessante geometrische Interpretation: Die Niveaulinien der Funktion $(u, v) \mapsto (u - u_0)\,(v - v_0)$ lassen sich ja als

$$v = v_0 + \frac{c}{u - u_0} = f(u), \qquad u \ge u_0,$$

parametrisieren und sind damit *Hyperbeln*. Wählt man den Parameter c groß genug, dann wird eine solche Hyperbel keinen Punkt mehr mit $\Omega(\boldsymbol{A})$ gemeinsam haben, wählt man ihn klein genug, dann wird ein ganzer Hyperbelbogen in $\Omega(\boldsymbol{A})$ verlaufen. Und irgendwo dazwischen liegt eine Hyperbel, die $\Omega(\boldsymbol{A})$ gerade in einem Punkt berührt[7], siehe Abb. 5.2.1, und genau dieser Berührpunkt ist die Nash–Lösung.

---

[5] Was andere Gründe wie Eitelkeit, Dummheit, Streit- und Rachsucht allerdings nicht ausschliesst. Gerade im März 2017 wie im Dezember 2024 ist von so etwas natürlich, zumindest in der politischen Realität, nicht auszugehen.

[6] Und damit wegen der Konvexität auch unendlich viele!

[7] Die Fläche unter der Hyperbel ist konkav, deswegen kann es nicht mehrere Schnittpunkte geben!

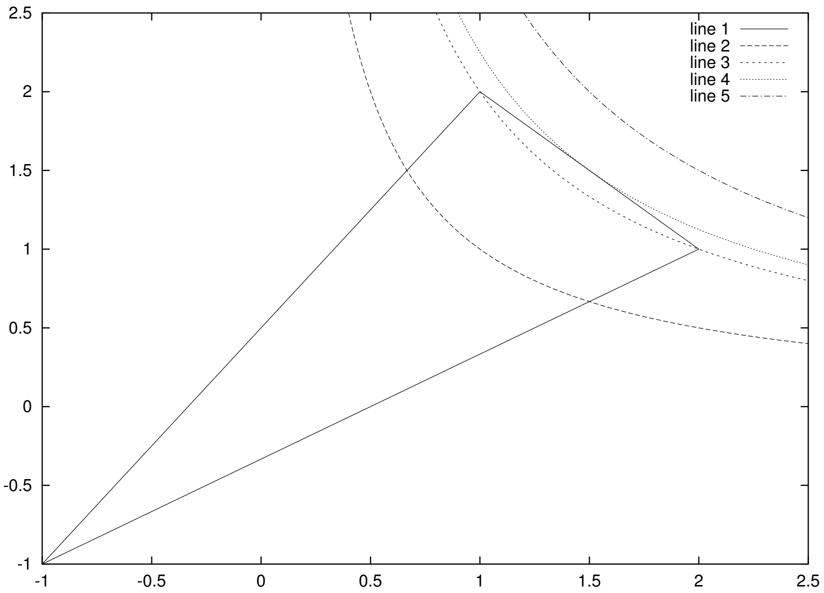

Abbildung 5.2.1: Die Menge $\Omega(\boldsymbol{A})$ zu Beispiel 5.1.1 und einige der Hyperbeln, inclusive der Berührhyperbel.

Bemerkung 5.2.4. Die Bestimmung der Nash-Lösung besteht also darin, ein *Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen*

$$\max f(u,v) := (u-u_0)\,(v-v_0)\,, \qquad (u,v) \in \Omega_{\geq \boldsymbol{a}_0}, \tag{5.2.3}$$

zu lösen. Das Maximum wird entweder an einem Randpunkt von $\Omega_{\geq \boldsymbol{a}_0}$ angenommen oder aber an einer Stelle, an der

$$0 = \nabla f(u,v) = \begin{bmatrix} v-v_0 \\ u-u_0 \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad (u,v) = \boldsymbol{a}_0$$

erfüllt ist. Die Optimallösung ist also entweder der Status Quo oder eine Randpunkt von $\Omega(\boldsymbol{A})$, aber wenn wir, wie in Bemerkung 5.2.3 annehmen, daß

$$\Omega_{>\boldsymbol{a}_0} := \{\boldsymbol{a} \in \Omega : \boldsymbol{a} > \boldsymbol{a}_0\} \neq \emptyset$$

ist, dann sind nur noch Randpunkte von $\Omega(\boldsymbol{A})$ für die Nash-Lösung zulässig.

Jetzt aber zu mathematischen Eigenschaften, die die Nash–Lösung charakterisieren.

Satz 5.2.5 (Nash–Lösung). *Die Nash–Lösung $\boldsymbol{a}^*$ aus* (5.2.1) *ist eindeutig und hat die folgenden Eigenschaften:*

1. *Ist $\Omega_1 = \boldsymbol{D}\Omega + \boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{D}\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{y}$ für eine Diagonalmatrix $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^2_+$ und einen Verschiebungsvektor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$, dann ergibt sich die zu Ω_1 gehörige Nash–Lösung als $\boldsymbol{a}_1^* = \boldsymbol{D}\boldsymbol{a}^* + \boldsymbol{y}$.*

2. *Ist $\boldsymbol{a} \in \Omega(\boldsymbol{A})$ und $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{a}^*$, dann ist $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^*$.*

3. *Ist $\Omega' \subseteq \Omega(\boldsymbol{A})$ konvex und gehört zu einem Status Quo $\boldsymbol{a}_0 \in \Omega'$ die Nash–Lösung $\boldsymbol{a}^*$ auch zu Ω', dann ist $\boldsymbol{a}^*$ auch Nash–Lösung in Ω'.*

4. *Ist $\Omega(\boldsymbol{A})$ symmetrisch[8] und ist $u_0 = v_0$, dann ist auch $u^* = v^*$.*

[8] Das heißt, daß $\boldsymbol{a} = (u,v) \in \Omega$ auch $\boldsymbol{a}' = (v,u) \in \Omega$ impliziert.

Außerdem ist die Nash–Lösung die einzige Lösungsfunktion[9], die alle oben aufgeführten Eigenschaften besitzt.

Den Beweis teilen wir in mehrere Teilresultate auf, bei denen wir dann die entsprechenden Aspekte ein wenig genauer interpretieren wollen. Die erste Beobachtung ist uns sogar eine formale Aussage wert.

Lemma 5.2.6. *Die Nash–Lösung ist eindeutig.*

Beweis: Angenommen, wir hätten zwei Nash–Lösungen, $\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{a}^\dagger \ge \boldsymbol{a}_0$, dann ist

$$\begin{aligned}(u^* - u_0)(v^* - v_0) &= \left(u^\dagger - u_0\right)\left(v^\dagger - v_0\right) \\ &= \max_{(u,v)\ge(u_0,v_0)} (u-u_0)(v-v_0) =: M,\end{aligned}$$

und somit auch

$$\frac{u^* - u_0}{u^\dagger - u_0} = \frac{v^\dagger - v_0}{v^* - v_0} =: w > 0. \tag{5.2.4}$$

Außerdem gehört natürlich der Mittelpunkt $\widehat{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{a}^* + \boldsymbol{a}^\dagger\right)$ auch zur konvexen Menge $\Omega(\boldsymbol{A})$ und erfüllt $\widehat{\boldsymbol{a}} \ge \boldsymbol{a}_0$, sowie, unter Verwendung von (5.2.4)

$$\begin{aligned}(\widehat{u} - u_0)(\widehat{v} - v_0) &= \left(\frac{u^* - u_0}{2} + \frac{u^\dagger - u_0}{2}\right)\left(\frac{v^* - v_0}{2} + \frac{v^\dagger - v_0}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}(u^* - u_0)(v^* - v_0)\left(1 + \frac{u^\dagger - u_0}{u^* - u_0}\right)\left(1 + \frac{v^\dagger - v_0}{v^* - v_0}\right) \\ &= \frac{M}{4}\left(1 + w^{-1}\right)(1+w).\end{aligned}$$

Nun ist aber für jedes $w > 0$,

$$\left(1 + w^{-1}\right)(1+w) = 1 + \frac{w^2+1}{w} + 1 = 4 + \frac{w^2 - 2w + 1}{w} = 4 + \frac{(w-1)^2}{w} \ge 4 \tag{5.2.5}$$

und somit ist entweder $w = 1$, also $\boldsymbol{a}^* = \boldsymbol{a}^\dagger$ oder es gilt die *strikte* Ungleichung in (5.2.5), die sofort zum Widerspruch

$$(\widehat{u} - u_0)(\widehat{v} - v_0) > M = \max_{(u,v)\ge(u_0,v_0)} (u-u_0)(v-v_0)$$

führt. □

Jetzt machen wir uns daran, die Eigenschaften der Nash–Lösung nachzuweisen.
Beweis von Satz 5.2.5: Die in Satz 5.2.5 als Eigenschaft 1) angeführte Invarianz unter Umskalierung des Nutzens[10] sieht man ganz einfach ein: Ist $\boldsymbol{a}^* \ge \boldsymbol{a}_0$ die Nash–Lösung, dann gehört natürlich

$$\boldsymbol{a}_1^* = \boldsymbol{D}\boldsymbol{a}^* + \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cu^* + x \\ dv^* + y \end{bmatrix}$$

[9] Als Funktion, die jedem Polyeder und jedem Startwert (Status Quo) eine Lösung zuordnet.

[10] Denn nichts anderes beschreibt diese Transformation: Die Werte u bzw. v, die den Nutzen beschreiben, den die Spieler jeweils aus einer Konfiguration ziehen, werden affin transformiert, also auf relativ einfache Weise umskaliert.

zu Ω_1, erfüllt $\boldsymbol{a}_1^* \geq \boldsymbol{a}_1$ und außerdem ist für jedes $\boldsymbol{a} = (cu + x, du + y) \in \Omega_1$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} & (c\,u + x - u_1)\,(d\,v + y - v_1) \\ = \quad & (c\,u + x - c\,u_0 - x)\,(d\,v + y - d\,v_0 - y) = cd\,(u - u_0)\,(v - v_0) \\ \leq \quad & cd\,(u^* - u_0)\,(v^* - v_0) = (c\,u^* + x - c\,u_0 - x)\,(d\,v^* + y - d\,v_0 - y) \\ = \quad & \left(u_1^* - u_1\right)\left(v_1^* - v_1\right) \end{aligned}$$

erfüllt, weswegen $\boldsymbol{a}_1^*$ die Nash–Lösung zu Ω_1 und $\boldsymbol{a}_1$ sein muss.

Eigenschaft 2) aus Satz 5.2.5 bezeichnet man als *Pareto–Optimalität* und besagt, daß es „rechts oben“ von der Nash–Lösung $\boldsymbol{a}^*$ keinen weiteren Punkt mehr geben kann. Anders gesagt: Würde man eine Verhandlung mit $\boldsymbol{a}^*$ als Status Quo beginnen, dann kann man sich das Verhandeln genauso gut sparen. Bewiesen ist sie ganz einfach: da $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{a}^* \geq \boldsymbol{a}_0$, ist

$$\underbrace{(u - u_0)}_{\geq u^* - u_0}\,\underbrace{(v - u_0)}_{\geq v^* - u_0} \geq (u^* - u_0)\,(v^* - v_0)$$

und Lemma 5.2.6 liefert sofort, daß $\boldsymbol{a}^* = \boldsymbol{a}$ sein muss.

Daß man überflüssige Teile von $\Omega(\boldsymbol{A})$ nicht zu berücksichtigen braucht, ist die Aussage von Eigenschaft 3), die sofort aus der Tatsache folgt, daß in

$$\begin{aligned} (u^* - u_0)\,(v^* - v_0) \quad &= \quad \max_{\boldsymbol{a}_0 \leq (u,v) \in \Omega} (u - u_0)\,(v - v_0) \\ &\geq \quad \max_{\boldsymbol{a}_0 \leq (u,v) \in \Omega'} (u - u_0)\,(v - v_0) \geq (u^* - u_0)\,(v^* - v_0) \end{aligned}$$

überall Gleichheit gelten muss.

Um unsere Liste der Eigenschaften der Nash–Lösung zu vervollständigen, müssen wir nur noch Punkt 4), die Symmetrie der Lösung für symmetrische Spiele, nachweisen. Sei $\boldsymbol{a}^*$ Nash–Lösung, also insbesondere $(u^*, v^*) \geq (u, u)$, $u = u_0 = v_0$. Setzen wir nun $\boldsymbol{a}^\sharp := (v^*, u^*)$, dann ist wegen der Symmetrie $\boldsymbol{a}^\sharp \in \Omega$ und es gelten trivialerweise

$$\boldsymbol{a}^\sharp \geq (u, u) \qquad \text{sowie} \qquad (u^* - u)\,(v^* - u) = (v^* - u)\,(u^* - u)\,,$$

also ist $\boldsymbol{a}^\sharp$ ebenfalls eine Nash–Lösung, die wegen der Eindeutigkeit, Lemma 5.2.6, gleich $\boldsymbol{a}^*$ sein muß. Und somit ist eben $u^* = v^*$.

Wie man sieht war die Verifikation der Eigenschaften doch gar nicht so schlimm. Was jetzt noch fehlt, ist die Tatsache, daß es *genau* eine Lösungsfunktion $\boldsymbol{a}^* = F(\Omega, \boldsymbol{a}_0)$ mit den obigen Eigenschaften gibt, die dann natürlich die Nash–Lösung sein muß. Um das zu beweisen, beginnen wir mit einem beliebigen konvexen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und einem Status Quo $\boldsymbol{a}_0$, für den

$$\{\boldsymbol{a} \in \Omega \;:\; \boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{a}_0\} \neq \{\boldsymbol{a}_0\}$$

ist[11], und sei $\boldsymbol{a}^*$ die zugehörige Nash–Lösung, also das Optimum aus (5.2.1). Nun skalieren wir das Problem so zu Ω_1 um, daß

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0} \qquad \text{und} \quad \boldsymbol{a}_1^* := \boldsymbol{D}\boldsymbol{a}^* + \boldsymbol{y} = (1, 1)$$

erfüllt sind, indem wir

$$\boldsymbol{D} = \left[\operatorname{diag}\,(u^* - u_0, v^* - v_0)\right]^{-1}, \quad \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{D}\boldsymbol{a}_0,$$

[11]Der Status Quo soll nicht schon Pareto–optimal sein, sonst ist das Problem trivial.

also

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{a}^* + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{a}^* - \boldsymbol{a}_0\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

wählen. Kein Punkt $\widehat{\boldsymbol{a}} \in \Omega_1 \setminus \{(1,1)\}$ kann $\geq (1,1)$ sein, denn für einen solchen Punkt wäre $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{D}^{-1}\left(\widehat{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{y}\right)$ ein Punkt in Ω, der

$$(u - u_0)(v - v_0) > (u^* - u_0)(v - v_0)$$

erfüllen würde. Als nächstes symmetrisieren wir Ω_1 zu Ω_2:

$$\Omega_2 = \Omega_1 \cup \{(v,u) \ : \ \boldsymbol{a} = (u,v) \in \Omega_1\}$$

und halten fest, daß $(1,1) \in \Omega_2$, aber daß es keinen Punkt $\boldsymbol{a}$ aus Ω_2 geben kann, so daß $\boldsymbol{a} \geq (1,1)$ ist, denn wäre $u \geq 1$ und $v \geq 1$, dann ist sowohl $(u,v) \geq (1,1)$ als auch $(v,u) \geq (1,1)$ und mindestens einer der beiden Punkte gehört zu Ω_1. In Ω_2 ist also $(1,1)$ ein Pareto–optimaler Punkt wegen Eigenschaft 2) und da der Status Quo $(0,0)$ war, muß nach Eigenschaft 4) auch die Optimallösung ein symmetrischer Punkt sein, also ist $(1,1) = F(\Omega_2, \mathbf{0})$. Nach Eigenschaft 3) ist die Symmetrisierung irrelevant und somit ist auch $(1,1) = F(\Omega_1, \mathbf{0})$ und die Rücktransformation liefert im Zusammenspiel mit Eigenschaft 1), daß

$$\boldsymbol{a}^* = F(\Omega, \boldsymbol{a}_0),$$

wie behauptet. Damit ist Satz 5.2.5 dann auch vollständig bewiesen. □

Beispiel 5.2.7. Kehren wir zu unserem Beispiel 5.1.1 zurück und suchen dort nach dem Nash–Gleichgewicht, der Einfachheit halber mit dem ziemlich minimalen Status Quo $(0,0) \in \Gamma(\boldsymbol{A})$. Wegen der Symmetrie des Bereichs $\Omega(\boldsymbol{A})$ brauchen wir nur entlang der Linie $x = y$ zu maximieren und da die Funktion x^2 monoton steigend ist, ist die Nash–Lösung selbstverständlich gerade der in Abb. 5.1.2 eingezeichnete Punkt $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Man kann nun trefflich darüber streiten, ob die Nash–Lösung wirklich fair ist, oder man kann sich auf den mathematischen Standpunkt stellen und ein faires Verhandlungsergebnis ganz einfach als Nash–Lösung definieren. Letzteres hat den Vorteil, daß man eine konsistente und widerspruchsfreie Definition erhält, aber den Nachteil, daß diese Definition manchmal ein klein wenig dem widerspricht, was man sich *intuitiv* unter Fairness vorstellt. Andererseits ist es aber nie garantiert, daß derartige intuitive Begriffe in sich konsistent und widerspruchsfrei sind.

Kritikpunkte an Nashs Konzept sind bereits in [20] aufgeführt, manche davon eher obskurer Natur, manche durchaus interessanter und nachvollziehbar.

Beispiel 5.2.8 (Zwei Räuber). Zwei Räuber, nennen wir sie *Roller* und *Spiegelberg*, siehe [30], sollen die Beute von 100 Dukaten untereinander aufteilen. Wenn sie es nicht schaffen, dann bekommt keiner von beiden was. Da es sich um 100 unteilbare Münzen handelt, hat jeder von den beiden Spielern 101 Strategien zur Verfügung, je nachdem, wie viele Münzen er für sich einfordert, also $\{0,\dots,100\}$. Der Auszahlungsbereich $\Gamma(\boldsymbol{A})$ besteht dann aus diesen 101 Punkten $(j, 100-j)$, $j = 0,\dots,100$, sowie dem Punkt $(0,0)$ und die konvexe Hülle davon ist das Dreieck, das von den drei Punkten $(0,0)$, $(0,100)$ und $(100,0)$ gebildet wird, siehe Abb. 5.2.2.

Die Nash–Lösung zu Beispiel 5.2.8 ist nicht schwer zu erraten, es ist die gerechte Teilung $(50,50)$. Der erste Einwand ist, daß die Rollen nicht fair sein müssen, daß beispielsweise Roller reich und gierig ist und lieber die Sache platzen lässt, bevor er nicht deutlich

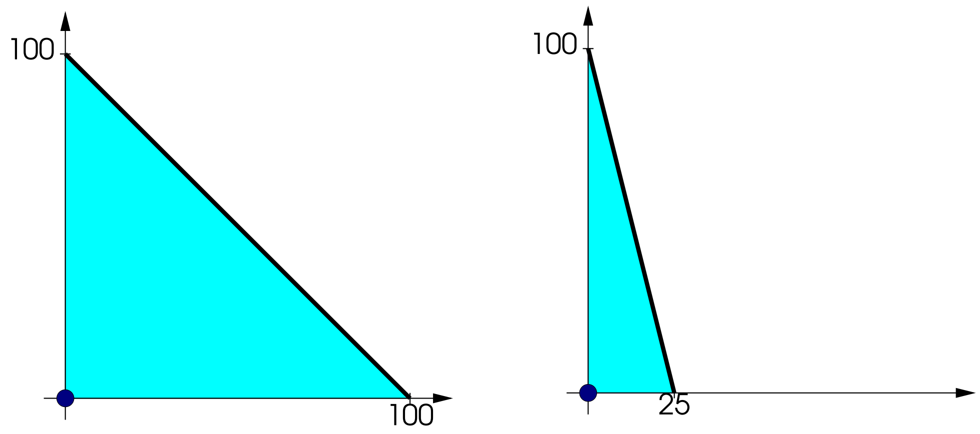

Abbildung 5.2.2: Die Bereiche $\Omega(\boldsymbol{A})$ zu Beispiel 5.2.8 *(links)* und dessen Variante (5.2.7). Der Auszahlungsbereich besteht nur aus der fetten Linie und dem Nullpunkt, erst durch die konvexe Hülle und die damit verbundenen gemeinsamen Strategien gewinnt er wirklich an Dimension.

mehr als Spiegelberg bekommt, daß andererseits Spiegelberg über alles froh ist, was er bekommt. Oder aber die gerechte Teilung könnte für Spiegelberg nutzlos sein, weil er mindestens 60 Dukaten braucht, um seine Schulden zurückzuzahlen; ansonsten müsste er ein Pfund Fleisch abgeben[12]. Trotzdem ist der Einwand vergleichsweise unbegründet, denn eigentlich ist hier schlichtweg die Nutzenfunktion falsch modelliert. Wenn ein Spieler mit einer Auszahlung $u < 60$ nichts anfangen kann, dann ist sein Nutzen halt 0 und der Wert $u = 0$ wäre viel angebrachter.

Bei Beispiel 5.2.8 können wir sogar die Abhängigkeit vom Status Quo explizit angeben. Sei dazu $\boldsymbol{a}_0 = (u_0, v_0) > 00$ mit $u_0 + v_0 < 100$ ein beliebiger Status Quo, dann wird nach Bemerkung 5.2.4 das Maximum auf dem Rand von $\Omega(\boldsymbol{A})$, in diesem Fall[13] auf der Kante $u + v = 100$, liegen. Damit müssen wir die Funktion

$$f(u) = (u - u_0)\,(100 - u - v_0) = -u^2 + (100 - u_0 - v_0)\,u + u_0\,(100 - v_0)$$

minimieren, was zu

$$0 = f'(u) = -2u + (100 + u_0 - v_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad u = 50 + \frac{u_0 - v_0}{2}$$

und wegen $v = 100 - u$ zur Lösung

$$\boldsymbol{a}^* = (u^*, v^*) = \left(50 + \frac{u_0 - v_0}{2}, 50 - \frac{u_0 - v_0}{2}\right) \tag{5.2.6}$$

führt. Verschiebt man also den Status Quo in Richtung von Spieler 1, d.h., $u_0 > v_0$, so erhält dieser auch einen größeren Anteil, ist hingegen $u_0 < v_0$, dann ist die Nash.Lösung auf der Seite von Spieler 2.

Beim zweiten Beispiel aus Abb. 5.2.2 gewichten wir den Nutzen durch Skalierung der x-Achse unterschiedlich und verwenden

$$\Gamma(\boldsymbol{A}) = \{(u, v) : 4u + v = 100\} \cup \{0\}. \tag{5.2.7}$$

[12]Was jetzt aber mit Schiller weniger zu tun hat, bei dem Nathan schließlich der Weise und nicht der Kaufmann von Mannheim war.
[13]Das sind die einzigen Randpunkte mit dem Potential „rechts oberhalb" von $\boldsymbol{a}_0$ zu liegen.

Hier hat die Nash–Lösung den Wert $(50, 12.5)$ und nun fühlen sich beide Spieler unfair behandelt:

- Roller beklagt, daß er auf 50 Einheiten verzichten muß, während Spiegelberg nur 12.5 Einheiten abgeben muß.
- Spiegelberg jammert, daß Roller viel mehr bekommt als er, er möchte die Auszahlung $(20, 20)$, die für beide denselben Wert liefert.

Man sieht: Was fair ist, liegt durchaus auch im Auge des Betrachters! Allerdings ist die Nash–Lösung ja auch nicht unfair, vielmehr gilt: Beide erhalten genau *die Hälfte* der zur erreichenden Maximalauszahlung.

5.3 Das Gesetz des Schweigens

Betrachten wir mit Blick auf die Erkenntnisse in Sachen Fairness nun noch einmal das *Gefangendilemma*, siehe Beispiel 1.1.1, diesmal aber mit der „offiziellen“ Auszahlungsmatrix[14]

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} (-3,-3) & (6,-4) \\ (-4,6) & (5,5) \end{bmatrix},$$

aus [20], die mittels

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} (6,6) & (6,6) \\ (6,6) & (6,6) \end{bmatrix} + 10 \underbrace{\begin{bmatrix} (-0.9,-0.9) & (0,-1) \\ (-1,0) & (-0.1,-0.1) \end{bmatrix}}_{=:\boldsymbol{A}'}$$

aus der Auszahlungsmatrix $\boldsymbol{A}'$ der anteiligen Gefängnisstrafen[15] hervorgeht. Sowohl in [20] als auch in [5] wird darauf hingewiesen, daß dieses Beispiel auf A. W. Tucker zurückgeht, die konkreten Auszahlungsfunktionen sind aber in den beiden Büchern unterschiedlich.

Der Auszahlungsbereich $\Gamma(\boldsymbol{A})$ ist hier das Bild des Einheitsquadrats unter der bilinearen Abbildung

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{f}(x,y) \\ &= \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} xy + \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix} x(1-y) + \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} (1-x)y + \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} (1-x)(1-y) \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ -9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

also ein gedrehtes und gestrecktes konvexes Viereck mit den Ecken

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Der konvexe Bereich $\Omega(\boldsymbol{A})$ ist aber die konvexe Hülle dieser Punkte, siehe Abb. 5.3.1, das heißt, jede Verhandlung der beiden Spieler besteht bestenfalls in der Absprache über gemischte Strategien und für *jeden symmetrischen* Status Quo muß das Nash–Gleichgewicht

[14] Strategie 1 ist hier „gestehen“. Und ja, das Ergebnis der Nash-Lösung hängt natürlich von den konkreten Zahlen ab.

[15] Das lässt Raum für eine individuelle Bewertung der Schwere des Vergehens.

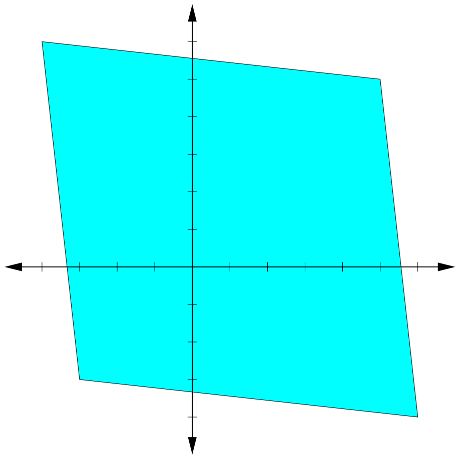

Abbildung 5.3.1: Der Auszahlungsbereich $\Gamma(\boldsymbol{A}) = \Omega(\boldsymbol{A})$ zum „offiziellen“ Gefangenendilemma.

das Maximum auf der Gerade $x = y$, also der Punkt $(5,5)$ sein, der nun wieder zum Strategieepaar „Omertà“ gehört. Mit anderen Worten: Ohne auch nur noch ein Wort darüber verlieren zu müssen, besteht die Optimalstrategie der beiden Gefangenen[16] darin, zusammezuhalten und nicht auszusagen.

Daß dem so ist, das hat natürlich ein klein wenig mit der Auswahl der Zahlen zu tun, denn solange die Summe der Diagonalwerte mit der Summe der Nebendiagonalwerte übereinstimmt, fällt immer der bilineare Teil weg: Ist bei einem symmetrischen Spiel

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} (a,a) & (b,c) \\ (c,b) & (d,d) \end{bmatrix}, \qquad a + d = b + c,$$

dann ist

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}(x,y) &= \begin{bmatrix} a+d-b-c \\ a+d-b-c \end{bmatrix} xy + \begin{bmatrix} b-d \\ c-d \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} c-d \\ b-d \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} d \\ d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b-d \\ c-d \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} c-d \\ b-d \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} d \\ d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

und das entsprechende Viereck hat die Ecken

$$\begin{bmatrix} d \\ d \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} c \\ b \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} b+c-d \\ b+c-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}.$$

In all diesen Fällen ist Verhandlung unnötig, da $\Gamma(\boldsymbol{A}) = \Omega(\boldsymbol{A})$ bereits von Haus aus konvex ist.

Das Gefangenendilemma zeigt auch, daß die Nash–Lösung durchaus vom Status Quo abhängt. Starten wir nämlich mit

$$\boldsymbol{a}^* = \begin{bmatrix} 5+\varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2},$$

dann ist die Nash–Lösung das Maximum von

$$(u - 5 - \varepsilon)\, v, \qquad u > 5 + \varepsilon,\ v > 0, \qquad v \le 50 - 9u,$$

[16] Sofern man nur das Nash–Gleichgewicht als faire Lösung akzeptiert.

das auf der Geraden $v = 50 - 9u$ angenommen wird, und somit das Maximum von

$$p(u) = -(u - 5 - \varepsilon)(9u - 50) = -9u^2 + (95 + 9\varepsilon)\, u - 50\,(5 + \varepsilon),$$

was natürlich an der Stelle

$$u = \frac{95 + 9\varepsilon}{18}, \qquad v = \frac{5 - 9\varepsilon}{2},$$

angenommen wird. Diese entspricht nun einer wirklichen gemeinsamen Strategie, auch wenn das gemeinsame Durchführen eines Zufallsexperiments in getrennten Zellen eine praktische Herausforderung darstellt.

Bemerkung 5.3.1. Die Anbhängigkeit des Nash–Gleichgewichts vom Status Quo ist einerseits vielleicht plausibel, wenn man bedenkt, daß das Verhandlungsergebnis oftmals vom Ausgangspunkt abhängt, andererseits aber ein echter Kritikpunkt, weil es, wie im Beispiel des Gefangenendilemmas nicht wirklich *die* Lösung gibt, wenn nicht klar ist, von welchem Punkt aus die Verhandlungen starten.

5.4 Das Acquisespiel

Es gibt ein weiteres Spiel, bei dem man Kooperation sehr schön verstehen kann, nämlich das *Acquisespiel*. Hierbei betreiben zwei Parteien (z.B. Vertreter) gemeinsam Acquise, versuchen also ein Projekt einzuwerben, dessen Erlös unter ihnen aufgeteil wird. Diese Acquise kostet jeweils 100 Einheiten, wenn beide diese betreiben, dann erhalten sie zusammen 300 Einheiten, wenn nur einer etwas tut und der andere den Schlaumeier spielt und einfach mitläuft, erhalten sie 150 Einheiten. Abzüglich des Aufwands, der natürlich nur fällig wird, wenn man auch was tut, erhalten wir mit den beiden Strategien „Acquise"/„keine Acquise" dann die Auszahlungsmatrizen

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 50 & -25 \\ 75 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 50 & 75 \\ -25 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.4.1}$$

Da die zweite Zeile von $\boldsymbol{A}_1$ die erste Zeile der Matrix dominiert, ist die offensichtliche individuelle Strategie von Spieler 1, keine Acquise zu betreiben und analog, wegen der Dominanz der Spalten von $\boldsymbol{A}_2$, legt sich Spieler 2 auf dasselbe fest und am Ende ergibt sich eine sichere Auszahlung von 0.

Andererseits führt aber die *kooperative* Strategie „beide Acquise" zu der deutlich besseren Auszahlung von jeweils 50, was auch für jeden *symmetrischen* Status Quo $\leq (50, 50)$ die optimale Verhandlungslösung ist. Das kann man nachrechnen oder auch in Abb. 5.4.1 sehen. Wenn hingegen eine Komponente von $\boldsymbol{a}_0$ einen Wert ≥ 50 hat, dann ist die Situation eine andere, aber dann sind die Rollen natürlich nicht mehr symmetrisch, denn es gibt kein $\boldsymbol{a} \in \Omega(\boldsymbol{A})$ mit $\boldsymbol{a} \geq (50, 50)$.

Fazit ist auf jeden Fall: Schlaumeierei und der Versuch, den anderen über den Tisch zu ziehen, lohnt sich spieltheoretisch nicht immer, vor allem nicht dann, wenn man den Unterschied zwischen Nullsummenspielen und Nichtnullsummenspielen nicht begriffen hat[17].

Diese Fairnessdiskussion legt es nahe, vielleicht doch einmal einen kleinen Exkurs in die Welt des axiomatischen Nutzens zu machen – was ist der denn eigentlich?

[17] Aber dann sollte man auch nicht behaupten, man würde rational oder spieltheoretisch sinnvoll handeln.

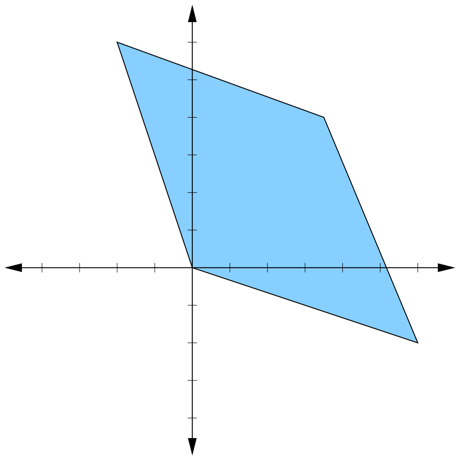

Abbildung 5.4.1: Der konvexe Auszahlungsbereich $\Gamma(\boldsymbol{A}) = \Omega(\boldsymbol{A})$ zum Acquisespiel (5.4.1).

5.5 Nutzen und Nutzenfunktionen

Eine Frage, die sich bei der Herleitung der Nash–Lösung ganz natürlich stellt, ist, ob und wie man den Begriff „Nutzen“ eigentlich mathematisch modellieren soll, und welche Operationen da überhaupt vernünftig sind. Das ist sicherlich einer der Punkte, der eine Spieltheorie angreifbar macht: Einerseits muß so ein Nutzenbegriff *eindeutig* und *konsistent* definiert sein, sonst kann man mathematisch nichts damit anfangen, andererseits aber bringt das immer Vereinfachungen mit sich, an denen man dann „intuitiv“ herummäkeln kann, wie wir beim Nash–Gleichgewicht bereits gesehen haben.

Die folgenden Axiome zur Festlegung eines Nutzenbegriffs, im Original *„utility“*, stammen von von Neumann und Morgenstern aus [26]; was fast interessanter ist, ist die *Diskussion* bzw. Verteidigung dieses Begriffs auf den Seiten 15–31.

Ein *Nutzen* ist ein Element aus einer Menge $\mathcal{N}$, die mit einer *totalen Ordnung*[18] „>“ versehen ist, und auf der eine Operation „Konvexkombination“

$$u, v \in \mathcal{N} \quad \mapsto \quad \alpha\, u + (1-\alpha)\, v \in \mathcal{N}, \qquad \alpha \in [0,1], \tag{5.5.1}$$

definiert ist, die auch das tut, was man von Addition und Multiplikation erwartet:

$$\begin{aligned} \alpha\, u + (1-\alpha)\, v &= (1-\alpha)\, v + \alpha\, u, \\ \beta\,(\alpha\, u + (1-\alpha)\, v) + (1-\beta) v &= \alpha\beta\, u + (1-\alpha\beta)\, v. \end{aligned}$$

Klar, die Möglichkeit der Konvexkombination braucht man, um einen *erwarteten Nutzen*

$$\mathcal{N} \ni \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{a} = \sum_{j=0}^{n} p_j\, a_j, \qquad \boldsymbol{a} \in \mathcal{N}^n, \quad \boldsymbol{p} \in \mathbb{S}_n,$$

einführen und berechnen zu können, der ja auch die Grundlage unserer gemeinsamen Strategien dargestellt hat. Außerdem sollen die Operation und die Ordnung noch sinnvoll miteinander verbunden sein:

$$u < v \qquad \Rightarrow \qquad u < \alpha\, u + (1-\alpha)\, v < v, \quad \alpha \in (0,1). \tag{5.5.2}$$

[18] Im Gegensatz zu einer Halbordnung sind bei einer totalen Ordnung alle Elemente vergleichbar, d.h., für $a \neq b$ gilt entweder $a < b$ oder $a > b$.

Das heißt nichts anderes als daß der Nutzen dadurch vergrößert wird, wenn es eine gewisse Wahrscheinlichkeit gibt, etwas nützlicheres zu erwischen und verkleinert, wenn die Wahrscheinlichkeit besteht, etwas weniger nützliches abzubekommen. Das letzte Axiom ist eine gewisse *Stetigkeit* des zu erwartenden Nutzens: zu $u < w < v$ gibt es $\alpha, \beta \in (0,1)$, so daß

$$u < \alpha\, u + (1-\alpha)\, v < w < \beta\, u + (1-\beta)\, v < v. \tag{5.5.3}$$

Mit anderen Worten: Liegt w vom Nutzen her strikt zwischen u und v, dann gibt es auch (eher große) Werte α und (eher kleine) Werte β, daß w auch zwischen diesen beiden Nutzen liegt.

Übung 5.5.1 Zeigen Sie, daß der $\mathbb{R}_+^n$ mit den beiden folgenden totalen Ordnungen

1. $x <_\ell y$ falls $x_j = y_j$, $j = 1, \dots, k-1$, $x_k < y_k$ für ein $k \in \{1, \dots, n\}$,

2. $x <_g y$ falls $|x|_1 < |y|_1$ oder $|x|_1 = |y|_1$ und $x >_\ell y$

eine *Nutzenmenge* ist. ◇

Das ist die Schnellversion des Nutzensbegriffs. Man kann nun eine *Nutzenfunktion* $\nu : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ definieren, die monoton sein und die Eigenschaft

$$\nu\,(\alpha\, u + (1-\alpha)\, v) = \alpha\, \nu\,(u) + (1-\alpha)\, \nu\,(v)$$

haben sollte, also eine *affine Funktion* auf $\mathcal{N}$ ist. Sind nun ν, μ zwei Nutzenfunktionen und sei ϕ so, daß $\phi \circ \mu = \nu$, $\phi : \mu(\mathcal{N}) \to \nu(\mathcal{N})$, ist[19], dann ist ϕ ebenfalls monoton,

$$u < v \qquad \Rightarrow \qquad \mu(u) < \mu(v) \qquad \Rightarrow \qquad \phi\,(\mu(u)) = \nu(u) < \nu(v) = \phi\,(\mu(v))$$

und es ist

$$\begin{aligned} \phi\,(\alpha\, \mu(u) + (1-\alpha)\, \mu(v)) &= (\phi \circ \mu)\,(\alpha\, u + (1-\alpha)\, v) \\ &= \nu\,(\alpha\, u + (1-\alpha)\, v) = \alpha\, \nu\,(u) + (1-\alpha)\, \nu\,(v) \\ &= \alpha\, (\phi \circ \mu)\,(u) + (1-\alpha)\, (\phi \circ \mu)\,(v) \\ &= \alpha\, \phi\,(\mu(u)) + (1-\alpha)\, \phi\,(\mu(v)). \end{aligned}$$

Vorausgesetzt, daß $\#\mu(\mathcal{N}) \geq 2$ ist[20], heißt dies nun aber, daß $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine affine Funktion sein muß, also

$$\phi(x) = ax + b, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

und alle Nutzenfunktionen weichen also nur durch die Skalierung a und den Grundnutzen b voneinander ab.

Was wir bisher ganz unterschlagen haben war die Frage, ob es sich bei dem Nutzen um den *individuellen* Nutzen eines einzelnen Spielers handelt, oder aber um einen *universellen* Nutzen, auf dem die Entscheidungen *aller* Spieler basieren. Daß der Übergang von individuellen zu universellen Präferenzen allerdings nicht nur schwer, sondern sogar unmöglich ist, das ist die Lektion, die wir in Kapitel 5.6 lernen werden,

[19] Wir machen hier keinerlei Annahmen an Stetigkeit oder dergleichen.
[20] Aber das wollen wir nun doch schon mal annehmen, denn sonst haben wir ein Problem mit „<“.

5.6 Der Satz vom Diktator

Einer der faszinierendsten und am leichtesten zu missinterpretierenden Sätze in diesem Umfeld ist der Satz von Arrow [1], der auch gerne als *Arrow–Paradoxon* bezeichnet wird. Andererseits belegt er eigentlich nur die alte Weisheit *„Man kann's nicht allen recht machen"*. Im Beweis dieses Satzes folgen wir dem Buch von Jacobs [16], das eine Sammlung von interessanten mathematischen Einzelproblemen darstellt, die im engeren oder weiteren Sinne mit Kombinatorik zu tun haben.

Das Problem, das wir untersuchen wollen, besteht aus der Frage, ob und wie man aus *individuellen* Präferenzen eine *universelle* Präferenzordnung konstruieren kann, die gewissen „demokratischen" Spielregeln genügt.

Beispiel 5.6.1. Eine Reisegruppe aus n Personen will bei einer Stadtbesichtigung k Ziele besichtigen und soll sich über die Besuchsreihenfolge einigen. Dazu hat jeder Reisende an seinem Platz ein kleines Kästchen, in dem er oder sie die Reihenfolge eintippen kann, ein Computer[21] bestimmt dann mit einem entsprechend cleveren Programm die Reihenfolge, in der die Sehenswürdigkeiten abgeklappert werden.

Was bedeutet das nun mathematisch? Jede der n Personen definiert auf der Menge

$$\mathbb{N}_m := \{1, \dots, m\} = 1 + \mathbb{Z}_m, \qquad \{0, \dots, m-1\} = \mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

eine *totale Ordnung* $\prec_j$, das heißt, eine Ordnung, bei der für zwei Alternativen $a \neq b \in \mathbb{N}_k$ entweder $a \prec_j b$ oder $b \prec_j a$ gilt. Alle Paare von Elementen müssen dabei vergleichbar sein, das ist die Natur der totalen Ordnung. Die Aufgabe besteht nun darin, aus diesen n totalen Ordnungen $\prec_j$, $j \in \mathbb{N}_n$, *eine universelle* Ordnung $\prec$ auf $\mathbb{N}_k$ zu konstruieren, die natürlich auf vernünftige Art und Weise die individuellen Präferenzen mit einbezieht. Wir können Präferenzen aber auch noch anders interpretieren, nämlich als *Permutationen* der Menge $\mathbb{N}_k$, also *Bijektionen* $\sigma_j : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$, wobei $\sigma_j(a) < \sigma_j(b)$ genau dann gilt, wenn $a \prec_j b$ ist. Die Menge aller Permutationen von $\mathbb{N}_k$ bezeichnen wir mit $\mathscr{P}(\mathbb{N}_k)$. Wir werden σ_j und $\prec_j$ mehr oder weniger synonym verwenden, je nachdem, welches von beiden uns gerade sympathischer ist bzw. nützlicher oder anschaulicher erscheint.

Definition 5.6.2 (Soziale Entscheidungsfunktion). Eine totale Ordnung $\prec$ auf $\mathbb{N}_m$ heißt *soziale Entscheidungsrelation* zu den Ordnungen[22] $\prec_j$, $j \in \mathbb{N}_n$, wenn sie die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

1. (Einstimmigkeit)
$$a \prec_j b, \quad j \in \mathbb{N}_n \qquad \Rightarrow \qquad a \prec b. \tag{5.6.1}$$
2. (Unabhängigkeit) Sind $\prec_j$ und $\prec_j'$, $j \in \mathbb{N}_n$, zwei Sätze von individuellen Ordnungsrelationen mit
$$\left\{j \,:\, a \prec_j b\right\} = \left\{j \,:\, a \prec_j' b\right\}, \qquad a \neq b, \tag{5.6.2}$$
und $\prec$, $\prec'$ die zugehörigen sozialen Entscheidungsrelationen, dann gilt
$$a \prec b \qquad \Leftrightarrow \qquad a \prec' b. \tag{5.6.3}$$

Eine Abbildung $d : \mathscr{P}^n(\mathbb{N}_k) \to \mathscr{P}(\mathbb{N}_k)$, $\sigma = d(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, heißt *soziale Entscheidungsfunktion*, wenn $\prec$ für alle $\prec_1, \dots, \prec_n$ eine soziale Entscheidungsrelation zu $\prec_1, \dots, \prec_n$ ist.

[21] Wäre es ein Raumschiff, so hieße der natürlich HAL.

[22] Die Bedeutung dieser Ordnung soll, in Anlehnung an Beispiel 5.6.1, „kommt vor" sein, aber nicht eine Nutzenrelation. Alle, denen das nicht passt, sollen die Relation halt im Geiste umdrehen.

Kommentieren wir noch schnell die beiden Axiome.

Bemerkung 5.6.3 (Soziale Entscheidungsfunktion). *Einstimmigkeit* ist naheliegend: Wenn allen a lieber ist als b, dann sollte sich das natürlich auch in der universellen Vorliebe niederschlagen. *Unabhängigkeit* hingegen ist ein wenig kniffliger, aber trotzdem nicht abwegig: Die Entscheidung wird ja „demokratisch“ getroffen, und wenn eine Teilmenge $J \subset \mathbb{N}_n$ sich mit der Entscheidung $a \prec b$ durchsetzt, dann gehen wir davon aus, daß dies nach einem wohlüberlegten demokratischen Prozeß erfolgt ist, und dieser Prozeß soll immer dasselbe Ergebnis liefern, solange diese Mehrheit nur die Alternative a der Entscheidung b vorzieht – wie groß der Abstand zwischen den beiden ist und was die anderen machen, das soll *keinen* Einfluß haben.

Ist man einmal von der Vernünftigkeit der beiden Axiome in Definition 5.6.2 überzeugt, dann kommt schnell die Enttäuschung, denn es gibt nicht viele soziale Entscheidungsfunktionen und die sind obendrein nicht sonderlich sozial.

Satz 5.6.4 (Satz vom Diktator, Arrow). *Ist $d : \mathscr{P}^n(\mathbb{N}_m) \to \mathscr{P}(\mathbb{N}_m)$ eine soziale Entscheidungsfunktion und $m > 2$, dann gibt es ein $j \in \mathbb{N}_n$, so daß*

$$d(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \sigma_j, \tag{5.6.4}$$

das heißt, $\prec = \prec_j$ für ein passendes j, die universelle Präferenz entsteht somit durch Auswahl einer individuellen *Präferenz.*

Bemerkung 5.6.5 (Diktaturen sind demokratisch[23]). Für $j \in \mathbb{N}_n$ definiert (5.6.4) eine soziale Entscheidungsfunktion.

Beweis: Ist $a \prec_k b$, $k \in \mathbb{N}_n$, dann ist natürlich auch $a \prec_j b$ und somit $a \prec b$ – Einstimmigkeit ist gewährleistet. Andererseits ist aber für beliebige $a \neq b$

$$a \prec b \quad \Leftrightarrow \quad j \in J = \{k \in \mathbb{N}_n : a \prec_k b\}$$

und

$$a \prec' b \quad \Leftrightarrow \quad j \in J' = \left\{k \in \mathbb{N}_n : a \prec'_k b\right\}$$

und solange $J = J'$ ist, gehört j zu beiden oder zu keiner der Mengen, weswegen auch die Unabhängigkeit erfüllt ist. □

Um zu zeigen, daß für soziale Entscheidungsfunktionen tatsächlich nur Diktaturen übrigbleiben, müssen wir natürlich ein bißchen mehr Arbeit investieren. Beginnen wir mit einem weiteren Begriff, der überhaupt nur dank der Unabhängigkeitsregel sinnvoll ist, ansonsten aber ziemlich einleuchtend.

Definition 5.6.6 (Mehrheit). Eine Menge $J \subset \mathbb{N}_n$ heißt *Mehrheit* für[24] $a, b \in \mathbb{N}_m$ bezüglich der sozialen Entscheidungsfunktion d, wenn

$$\left.\begin{array}{lllll} a & \prec_j & b, & j \in J, \\ b & \prec_j & a, & j \in \mathbb{N}_n \setminus J \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a \prec b.$$

Lemma 5.6.7 (Mehrheiten sind Mehrheiten). *Ist $J \subset \mathbb{N}_n$ eine Mehrheit für* ein Paar $a, b \in \mathbb{N}_m$ *von Alternativen, dann ist J eine Mehrheit für* alle $x, y \in \mathbb{N}_m$.

[23]Das Motto des Jahres 2017.

[24]Achtung, die Reihenfolge spielt hier eine Rolle!

Beweis: Ist $m = 2$, dann gibt es überhaupt nur den einen Vergleich zwischen a und b und Lemma 5.6.7 gilt trivialerweise.

Im interessanten Fall $m \geq 3$ wählen wir drei verschiedene Elemente $a, b, c \in \mathbb{N}_m$ und wählen $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ so, daß[25] $\sigma_j(\{a, b, c\}) = \{1, 2, 3\}$ und

$$a \prec_j b \prec_j c, \qquad j \in J, \qquad \text{und} \qquad b \prec_j c \prec_j a, \qquad j \notin J.$$

Nach der Einstimmigkeitsregel folgt dann sofort, daß

$$b \prec c \qquad \text{und} \qquad \{a, b, c\} \prec \mathbb{N}_m \setminus \{a, b, c\},$$

und da J eine Mehrheit für a, b ist, folgt auch $a \prec b$, also insgesamt

$$a \prec b \prec c \prec \mathbb{N}_m \setminus \{a, b, c\}. \tag{5.6.5}$$

Nach der Unabhängigkeitsregel können wir nun aber die *absoluten* Reihungen von a, b, c beliebig verändern, solange nur ihre *relativen* Reihenfolgen beibehalten werden, also gilt immer noch, daß

$$\left.\begin{array}{ll} a \prec_j b \prec_j c, & j \in J, \\ b \prec_j c \prec_j a, & j \notin J \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a \prec b \prec c.$$

Betrachten wir hier nur das Auftreten von a, c, und ignorieren wir b ganz einfach[26], dann sehen wir, daß J auch eine Mehrheit (bzgl. d) für a, c ist. Ganz analog zeigt man auch, daß

$$\left.\begin{array}{ll} c \prec_j a \prec_j b, & j \in J, \\ a \prec_j b \prec_j c, & j \notin J \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad c \prec a \prec b$$

und erhält, daß J auch eine Mehrheit für c, b ist. Mit anderen Worten: Ist J eine Mehrheit für a, b und ist $c \neq a, b$, dann ist J auch eine Mehrheit für a, c und c, b, wir können also jedes der beiden Elemente durch jedes andere ersetzen. Durch den Austausch

$$a, b \to a, y \to x, y$$

kommen wir also in zwei Schritten von a, b zu jedem anderen Paar, für das J ebenfalls eine Mehrheit sein muß. $\square$

Was wir jetzt noch zeigen müssen, ist, daß aufgrund der Axiome jede Mehrheit einelementig sein muß, also jede Mafia einen Paten hat, der allein den Gang der Dinge bestimmt. Dazu wieder einen mathematischen, diesmal mengentheoretischen Begriff[27].

Definition 5.6.8 (Filter). Ein System $\mathscr{F}$ von Teilmengen von $X \neq \emptyset$ heißt *Filter* in X, wenn

1. $\emptyset \notin \mathscr{F}$,
2. $\mathscr{F} \ni A \subseteq B \subseteq X \quad \Rightarrow \quad B \in \mathscr{F}$,
3. $A, B \in \mathscr{F} \quad \Rightarrow \quad A \cap B \in \mathscr{F}$,

und *Ultrafilter* in X, wenn außerdem für jedes $A \subseteq X$ entweder A oder $X \setminus A$ zu $\mathscr{F}$ gehört.

[25] Mit anderen Worten: a, b, c sind auf jeden Fall die drei *kleinsten*, also beliebtesten Elemente für *alle* Individuen.

[26] Es ist wieder die Unabhängigkeitsregel, die uns das gestattet.

[27] Der laut [16] *„[...] jedem gebildeten Mathematiker vertraut [...]“* sein sollte.

Diesen eher abstrakten Begriff können wir nun sofort mit Leben versehen, denn wir kennen bereits einen Ultrafilter.

Lemma 5.6.9 (Mehrheiten sind Ultrafilter). *Das System aller Mehrheiten zu einer sozialen Entscheidungsfunktion d bildet einen Ultrafilter.*

Beweis: Daß die leere Menge im Gegensatz zu $\mathbb{N}_n$ keine Mehrheit bildet, leuchtet unmittelbar ein und verifiziert obendrein Bedingung 1 aus Definition 5.6.8.

Ist J eine Mehrheit und $K \supseteq J$, dann betrachten wir für $a, b, c \in \mathbb{N}_m$ ein Meinungsbild, bei dem

$$\begin{aligned} a \prec_j b \prec_j c, &\qquad j \in J, \\ b \prec_j a \prec_j c, &\qquad j \in K \setminus J, \\ b \prec_j c \prec_j a, &\qquad j \notin K. \end{aligned}$$

Weil J eine Mehrheit ist und $a \prec_j b$, $j \in J$, sowie $b \prec_j a$, $j \notin J$, gilt, erhalten wir, daß $a \prec b$, und die Einstimmigkeitsregel liefert außerdem $b \prec c$, also $a \prec b \prec c$. Weil aber damit $b \prec_j c$, $j \in K$, und $c \prec_j b$, $j \notin K$, gilt, ist K ebenfalls eine Mehrheit, zuerst für b, c, dann aber nach Lemma 5.6.7 auch für alle Alternativen.

Um zu zeigen, daß auch der Durchschnitt zweier Mehrheiten[28] J, K eine Mehrheit bildet, setzen wir

$$\begin{aligned} a \prec_j b \prec_j c, &\qquad j \in J \cap K, \\ c \prec_j a \prec_j b, &\qquad j \in J \setminus K, \\ b \prec_j c \prec_j a, &\qquad j \in K \setminus J, \\ c \prec_j b \prec_j a, &\qquad j \notin J \cup K. \end{aligned}$$

Das alte Spiel liefert, daß J eine Mehrheit für a, b und K eine Mehrheit für b, c ist, also $a \prec b \prec c$ sein muß. Weil aber auch

$$a \prec_j c, \quad j \in J \cap K, \qquad \text{sowie} \qquad c \prec_j a, \quad j \notin J \cap K,$$

erfüllt sind, ist $J \cap K$ eine Mehrheit für a, c und somit eine generelle Mehrheit, und damit bilden die Mehrheiten einen Ultrafilter. □

Der Schlüssel zum Satz vom Diktator, Satz 5.6.4, ist nun der folgende Satz, der laut [16] auch schon Arrow bekannt war und von ihm verwendet wurde, und der besagt, daß in *endlichen* Mengen jeder Ultrafilter durch genau ein Element festgelegt wird.

Satz 5.6.10. *Ist X endlich und $\mathscr{F}$ ein Ultrafilter in X, dann gibt es genau ein $x \in X$, so daß*

$$\mathscr{F} = \{A \subseteq X \ : \ x \in A\}.$$

Beweis: Da X endlich ist, ist auch $\mathscr{F}$ endlich und $\#\mathscr{F} \le 2^{\#X}$. Da Ultrafilter unter Durchschnittbildung abgeschlossen sind, ist

$$\bigcap_{A \in \mathscr{F}} A =: A^* \in \mathscr{F}$$

und insbesondere $A^* \neq \emptyset$. Hätte aber A^* zwei oder mehr Elemente, dann wählen wir eines von diesen, nennen es a und stellen fest, daß entweder $\{a\}$ oder $X \setminus \{a\}$ zu $\mathscr{F}$ gehören muß. Im ersten Fall ist dann aber $A^* = A^* \cap \{a\} = \{a\}$ einelementig, im zweiten Fall

[28] Und das ist eigentlich der Knackpunkt der ganzen Geschichte: Durchschnitte von Mehrheiten sollten irgendwann nur noch Minderheiten sein!

hingegen $A^* = A^* \cap (X \setminus \{a\}) = A^* \setminus \{a\}$, was in beiden Fällen ein Widerspruch wäre. Also ist $A^* = \{x\}$ und das ist genau das, was behauptet wurde. □

Beweis von Satz 5.6.4: Da die Menge $\mathscr{F}$ der Mehrheiten einen Ultrafilter bildet, insbesondere also nicht leer ist, muß es nach Satz 5.6.10, ein $j \in \mathbb{N}_n$ geben, so daß J genau dann eine Mehrheit ist, wenn $j \in J$ ist. Und dieses j ist unser Diktator. □

Bemerkung 5.6.11. Was ist nun das besondere Problem, das zum Diktatortheorem führt? Ganz einfach: Die Unabhängigkeitsregel führt dazu, daß plötzlich der Durchschnitt zweier Mehrheiten wieder zur Mehrheit, und zwar zu ***universellen*** Mehrheit für alle Alternativen wird, und daß entweder eine Menge oder deren Komplement Mehrheit sein muß. Den Ultrafilter als solchen brauchen wir eigentlich nicht, aber wenn man was für seine mathematische Allgemeinbildung tun kann, dann sollte man das tun.

Bemerkung 5.6.12. Ein Ausweg aus der Diktatur besteht darin, nur Alternativen zuzulassen, also nur über Ja–Nein–Fragen abzustimmen, den das „Paradoxon" in Satz 5.6.4 tritt nur dann ein, wenn $m > 2$ its und damit mehr als zwei Möglichkeiten zur Auswahl stehen. Erstaunlicherweise werden mindestens seit den Zeiten des Ostrakismos demokratische Entscheidungen auf der Basis von Ja–Nein–Entscheidungen gefällt, wo die einfache Mehrheit ebenfalls eine soziale Entscheidungsfunktion darstellt.

Nichtkooperative Mehrpersonenspiele | 6

Daß doch die Menschen immer meinen, eine Tatsache erklärt zu haben, wenn sie nur ein recht fremdartiges Wort dafür gefunden haben.

(F. Glausner, *Der Tee der drei alten Damen*)

Bevor wir uns an die Theorie der Mehrpersonenspiele nach Morgenstern-Neumann [26] machen, sehen wir uns zuerst die Theorie der nichtkooperativen Mehrpersonenspiele nach Nash [24] an, die eine Verallgemeinerung des Minimax-Prinzips aus Satz 2.3.1 auf mehrere Spieler darstellt. Nash verweist in seiner Arbeit *explizit* auf das Buch [26] und erweitert die Theorie eben auf Mehrpersonenspiele ohne Kooperationsaspekte, beispielsweise wenn keine Kommunikation zwischen Spielern möglich oder gewünscht ist. Derartige Gleichgewichtssätze spielen auch in der mathematischen Ökonomie eine wichtige Rolle.

Amüsant ist außerdem der Beweis, der auf einen Fixpunktsatz beruht und damit einen Beitrag zur mathematischen Allgemeinbildung leistet.

6.1 Das Nash-Gleichgewicht

Wir betrachten jetzt ein n-Personen-Spiel mit Strategiemengen $S_1, \dots, S_n$ und Auszahlungsfunktion $\boldsymbol{a} : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}^n$. Ob es sich um ein Nullsummenspiel handelt oder nicht, ist egal.

Definition 6.1.1. Die *reinen Strategien* der Spieler definieren die zugehörigen Auszahlungsfunktionen

$$a_j : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{6.1.1}$$

Das Spiel heisst *endlich*, wenn $m_j := \# S_j < \infty$, $j = 1, \dots, n$

Erwartete Auszahlungen indem wir $S_j = \left\{ s_1^j, \dots, s_{m_j}^j \right\}$ schreiben dann die *multilineare Funktion*

$$\begin{aligned} a_j(\boldsymbol{p}) &= a_j\left(\boldsymbol{p}^1, \dots, \boldsymbol{p}^n\right) = p_1^1 a_j\left(s_1^1, \boldsymbol{p}^2, \dots, \boldsymbol{p}^n\right) + \cdots + p_{m_1}^1 a_j\left(s_{m_1}^1, \boldsymbol{p}^2, \dots, \boldsymbol{p}^n\right) \\ &= \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} p_{\alpha_1}^1 a_j\left(s_{\alpha_1}, \boldsymbol{p}^2, \dots, \boldsymbol{p}^n\right) = \cdots = \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{\alpha_n=1}^{m_n} \left(\prod_{k=1}^{n} p_{\alpha_k}^k \right) \underbrace{a_j\left(s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_n}\right)}_{=: a_j(s_\alpha)} \end{aligned}$$

als Auszahlung bestimmern. Diese Funktion ist offensichtlich stetig und verwendet den *Auszahlungstensor*[1] $a_j(s_\alpha)$, $\alpha \le \mu = (m_1, \dots, m_n)$. Wir könnten aber in Definition 6.1.1 grundsätzlich auch komplexere erwartete Auszahlungen betrachten und werden sehen, daß es eben eigentlich nur um Stetigkeit geht.

[1] Vereinfacht gesagt ist ein Tensor eine hochdimensionale Matrix.

Damit können wir aber auch schon fast den Gleichgewichtssatz von Nash für Mehrpersonenspiele formulieren, zumindest, wenn wir festlegen, was wir unter einem Gleichgwicht verstehen.

Definition 6.1.2. Ein *Gleichgewicht* bzw. *Equilibrium*[2] $\boldsymbol{p} \in \mathbb{S}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{S}_{m_n}$ ist eine Kombination von gemischten Strategien mit der Eigenschaft daß[3]

$$a_j\left(\ldots,\boldsymbol{p}^j,\ldots\right) = \max_{q \in \mathbb{S}_{m_j}} a_j\left(\ldots,\boldsymbol{q},\ldots\right), \qquad j = 1,\ldots,n. \tag{6.1.2}$$

Bemerkung 6.1.3. Gleichgewichte sind Optimalstrategien im (pessimistischen) Sinne der Spieltheorie: Wenn alle anderen Spieler ihre Strategien festhalten und nur Spieler j seine Strategie ändert, dann wird Spieler j sich verschlechtern.

Satz 6.1.4 (Nash). *Jedes endliche Mehrpersonenspiel hat mindestens einen Gleichgewichtspunkt.*

Wir beginnen den Beweis mit einer einfachen Verallgemeinerung von Lemma 2.3.6, die zeigt, daß die Extremalwerte wieder in den Ecken angenommen werden. Der Beweis ist eigentlich identisch.

Lemma 6.1.5. *Für $j \in \{1,\ldots,n\}$ gilt*

$$\max_{\boldsymbol{p}^j \in \mathbb{S}_{m_j}} a_j(\ldots,\boldsymbol{p}^j,\ldots) = \max_{k \in \{1,\ldots,m_j\}} a_j(\ldots,\boldsymbol{e}_k,\ldots) \tag{6.1.3}$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus der Multilinearität der Funktionen bzw. aus der Linearität von a_j bezüglich der $j$ten Variablen:

$$\begin{aligned} a_j(\ldots,\boldsymbol{p}^j,\ldots) &= \sum_{k=1}^{m_j} p_k^j\, a_j(\ldots,\boldsymbol{e}_k,\ldots) \le \max_{k \in \{1,\ldots,m_j\}} a_j(\ldots,\boldsymbol{e}_k,\ldots) \underbrace{\sum_{k=1}^{m_j} p_k^j}_{=1} \\ &= \max_{k \in \{1,\ldots,m_j\}} a_j(\ldots,\boldsymbol{e}_k,\ldots), \end{aligned}$$

und da $\boldsymbol{p}^j = \boldsymbol{e}_k$ als reine Strategie eine valide gemischte Strategie ist, gilt Gleichkeit der Maxima in (6.1.3). □

Beweis von Satz 6.1.4: Wir betrachten das Ganze aus Sicht von Spieler j und definieren

$$\phi_{jk}(\boldsymbol{p}) := \max\left(0, a_j(\ldots,\boldsymbol{e}_k,\ldots) - a_j(\ldots,\boldsymbol{p}^j,\ldots)\right), \qquad k = 1,\ldots,m_j,$$

also den Gewinn, den Spieler j erreichen kann, wenn er von $\boldsymbol{p}^j$ zur k-ten reinen Strategie wechselt. Damit definieren wir

$$q_k^j(\boldsymbol{p}) = \frac{p_k^j + \phi_{jk}(\boldsymbol{p})}{1 + \sum_\ell \phi_{j\ell}(\boldsymbol{p})} \ge 0, \qquad k = 1,\ldots,m_j,\ j = 1,\ldots,n. \tag{6.1.4}$$

[2] Das ist aber auch nur das Fremdwort für „Gleichgewicht“.

[3] Die Notation in (6.1.2) steht für

$$a_j\left(\ldots,\boldsymbol{p}^j,\ldots\right) = a_j\left(\boldsymbol{p}^1,\ldots,\boldsymbol{p}^{j-1},\boldsymbol{p}^j,\boldsymbol{p}^{j+1},\ldots,\boldsymbol{p}^n\right),$$

die nicht angegebenen Variablen sind also mit $\boldsymbol{p}^k$ besetzt. Dies werden wir immer verwenden, wenn sich die angegebene Variable aus dem Kontext ergibt.

Dann ist

$$\sum_{k=1}^{m_j} q_k^j(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{1+\sum_\ell \phi_{j\ell}(\boldsymbol{p})} \underbrace{\sum_{k=1}^{m_j} \left(p_k^j + \phi_{jk}(\boldsymbol{p})\right)}_{=1+\sum_k \phi_{jk}(\boldsymbol{p})} = 1,$$

also $\boldsymbol{q}^j(\boldsymbol{p}) \in \mathbb{S}_{m_j}$. Damit ist $\boldsymbol{q} = \left(\boldsymbol{q}^1, \dots, \boldsymbol{q}^n\right)$ eine stetige Funktion von $\mathbb{I} = \mathbb{S}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{S}_{m_n}$ in sich selbst und hat nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz[4], Satz 6.2.2 einen Fixpunkt $\boldsymbol{p}$ mit $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{p})$, $j = 1, \dots, n$.

Bleibt zu zeigen, daß dieser Fixpunkt $\boldsymbol{p}$ ein Gleichgewichtspunkt ist. In der Tat bedeutet Fixpunkt nach der Definition (6.1.4), daß

$$\left(1 + \sum_{\ell=1}^{m_j} \phi_{j\ell}\right) p_k^j = p_k^j + \phi_{jk}, \qquad k = 1, \dots, m_j,\ j = 1, \dots, n,$$

und damit, unter der Annahme, daß $0 \neq \phi_j = \left(\phi_{jk} : k = 1, \dots, m_k\right)$,

$$\left(\sum_{k=1}^{m_j} \phi_{jk}\right) p_k^j = \phi_{jk} \quad \Rightarrow \quad p_k^j = \frac{\phi_{jk}}{\sum_\ell \phi_{j\ell}}, \qquad k = 1, \dots, m_j,\ j = 1, \dots, n.$$

Ist $\phi_{jk} > 0$ für ein k, dann ist $\boldsymbol{p}^j = \boldsymbol{e}^k$ und wir erhalten den Widerspruch $0 < a(\dots, \boldsymbol{e}^k, \dots) - a(\dots, \boldsymbol{e}^k, \dots) = 0$. Ist $\phi_{jk} > 0$ für mehrere k, dann wählen wir k so, daß

$$a(\dots, \boldsymbol{e}^k, \dots) = \min_{\{r : \phi_{jr} \neq 0\}} a(\dots, \boldsymbol{e}^r, \dots).$$

Nun bedeutet $\phi_{jk} > 0$, daß

$$\begin{aligned} 0 &< \phi_{jk} = a_j(\dots, \boldsymbol{e}^k, \dots) - \sum_{r=1}^{m_j} \frac{\phi_{jr}}{\sum_\ell \phi_{j\ell}} a_j(\dots, \boldsymbol{e}^r, \dots) \\ &= \frac{1}{\sum_\ell \phi_{j\ell}} \left(a_j(\dots, \boldsymbol{e}^k, \dots) \sum_{r \neq k} \phi_{jr} - \sum_{r \neq k} \phi_{jr} a_j(\dots, \boldsymbol{e}^r, \dots) \right), \end{aligned}$$

also

$$a_j(\dots, \boldsymbol{e}^k, \dots) > \frac{1}{\sum_{r \neq k} \phi_{jr}} \sum_{r \neq k} \phi_{jr} \underbrace{a_j(\dots, \boldsymbol{e}^r, \dots)}_{\geq a_j(\dots, \boldsymbol{e}^k, \dots)} \geq a_j(\dots, \boldsymbol{e}^k, \dots) \frac{\sum_{r \neq k} \phi_{jr}}{\sum_{r \neq k} \phi_{jr}},$$

was wieder ein Widespruch ist. Also bleibt nur noch $\phi_{jk} = 0$, $k = 1, \dots, m_j$, $j = 1, \dots, n$, und damit ist

$$a_j(\dots, \boldsymbol{p}^j, \dots) \geq a_j(\dots, \boldsymbol{e}_k, \dots), \qquad k = 1, \dots, m_j,\ j = 1, \dots, n,$$

also,nach Lemma 6.1.5,

$$a_j(\dots, \boldsymbol{p}^j, \dots) \geq \max_{k=1,\dots,m_j} a_j(\dots, \boldsymbol{e}_k, \dots) = \max_{\boldsymbol{q} \in \mathbb{S}_{m_j}} a_j(\dots, \boldsymbol{q}, \dots), \qquad j = 1, \dots, n,$$

weswegen $\boldsymbol{p}$ ein Gleichgewichtspunkt ist. □

Bemerkung 6.1.6. Offensichtlich ist das Minimax-Theorem ein Spezialfall von Satz 6.1.4 für $n = 2$.

[4]Den wir im nächsten Abschnitt beweisen werden.

6.2 Der Brouwersche Fixpunktsatz

Fixpunktsätze spielen in der Mathematik eine große Rolle. Generell geht es darum, daß man eine Funktion $f : \Omega \to \Omega$ betrachtet und zeigt, daß es unter gewissen Voraussetzungen an f und Ω einen Punkt gibt, der von f invariant gelassen wird. *Der* Klassiker hierbei ist natürlich der Banachsche Fixpunktsatz für Kontraktionen, den man aus Analysis und Numerik kennen sollte, der uns aber nicht interessiert.

Definition 6.2.1. Ein *Fixpunkt* $x^* \in \Omega$ einer Funktion $f : \Omega \to \Omega$ ist ein Punkt mit der Eigenschaft

$$f(x^*) = x^*. \tag{6.2.1}$$

Der Brouwersche Fixpunktsatz [2] wird normalerweise für Kugeln oder Simplizes formuliert, Nash verwendet ihn in [24] allerdings für *Zellen*, das sind Tensorprodukte von Simplizes.

Satz 6.2.2 (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Jede* stetige *Funktion $f : \mathbb{S}_m \to \mathbb{S}_m$, die ein Simplex in sich selbst abbildet, hat (mindestens) einen Fixpunkt.*

Daß Fixpunkte nicht eindeutig sein müssen, sieht man ja bereits am Beispiel der Funktion $f(x) = x$. Auf Produkte von Simplizes, so wie im Beweis von Satz 6.1.4 benötigt, lässt sich das Resultat leicht erweitern.

Korollar 6.2.3 (Brouwerscher Fixpunktsatz für Produkte). *Jede* stetige *Funktion f, die ein Produkt $\mathbb{S}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{S}_{m_n}$ von Simplizes in sich selbst abbildet, hat (mindestens) einen Fixpunkt.*

Beweis: Induktion über n, wobei $n = 1$ genau Satz 6.2.2 ist. Sei nun

$$f : \underbrace{\mathbb{S}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{S}_{m_n}}_{=:\mathbb{I}_n} \times \mathbb{S}_{m_{n+1}} = \mathbb{I}_n \times \mathbb{S}_{m_{n+1}}$$

stetig. Nach Induktionshyptohese gibt es zu jedem $\boldsymbol{q} \in \mathbb{S}_{m_{n+1}}$ ein $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{I}_n$ als Fixpunkt der Einschränkung $f(\cdot, \boldsymbol{q})|_{\mathbb{I}} : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$, das heißt,

$$f\left(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}), \boldsymbol{q}\right) = \left(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}), f_{n+1}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}), \boldsymbol{q})\right), \qquad f_{n+1} : \mathbb{S}_{m_{n+1}} \to \mathbb{S}_{m_{n+1}}.$$

Die stetige[5] Funktion $\boldsymbol{q} \mapsto f_{n+1}\left(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}), \boldsymbol{q}\right)$ hat nach Satz 6.2.2 ebenfalls einen Fixpunkt, sagen wir $\boldsymbol{q}^*$ und damit ist

$$\boldsymbol{p}^* = \left(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}^*), \boldsymbol{q}^*\right)$$

der gesuchte Fixpunkt. □

Der Beweis von Satz 6.2.2 wird auf einem weiteren sehr interessanten Resultat basieren, das sich mit der Kombinatorik von Simplizes befasst. Dazu ein bisschen Terminologie.

Definition 6.2.4 (Simplizes).

1. Ein *k-Simplex* $\Delta \in \mathbb{R}^d$ ist definiert als konvexe Hülle $[\![x^0, \dots, x^k]\!]$ von $k+1$ Punkten, $k \le d$. Wir schreiben es auch als $[\![X]\!]$, wobei $X = \left[x^0, \dots, x^k\right] \in \mathbb{R}^{d \times k}$.

[5] Daß sie stetig ist, ist allerdings nicht ganz offensichtlich und braucht ein bisschen Überlegung, man kann es aber zeigen; es steckt der Satz über implizite Funktionen und eine Approximation durch „brave Funktionen“ dahinter

2. Das Simplex heißt *nichtdegeneriert*, wenn die Vektoren $x^j - x^0$, $j = 1, \dots, k$, linear unabhängig sind. Als *Dimension* des Simplex bezeichnen wir die Dimension des von $x^j - x^0$, $j = 1, \dots, k$, aufgespannten Vektorraums.

3. *Konvention:* Unter einem Simplex verstehen wir für den Rest des Kapitels ein *nichtdegeneriertes* Simplex.

4. Für $K \subset \{0, \dots, k\}$ schreiben wir

$$X_K := \left[x^j : j \in K \right]$$

und nennen $\Delta_K := [\![X_K]\!]$ die zugehörige $(\#K - 1)$-dimensionale Seite von Δ.

Definition 6.2.5 (Simpliziale Zerlegung). Unter einer *simplizialen Zerlegung, Triangulierung* oder *Tesselierung* einer Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ versteht man eine Menge $\mathscr{D}$ von nichtdegenerierten Simplizes mit der Eigenschaft

$$\Omega = \bigcup_{\Delta \in \mathscr{D}} \Delta \tag{6.2.2}$$

und für $\Delta, \Delta' \in \mathscr{D}$ gibt es $K, K' \subset \{0, \dots, d\}$, so daß[6]

$$\Delta \cap \Delta' = \Delta_K \cap \Delta'_{K'}, \qquad \#K = \#K'. \tag{6.2.3}$$

Anschaulich gesprochen ist eine Triangulierung einer Menge also eine Zerlegung der Menge in nichtdegenerierte Simplizes, die sich nur in niederdimensionalen Simplizes, also Ecken, Kanten und so weiter, schneiden. Schreiben wir

$$\Delta = [\![X_\Delta]\!] = [\![x_\Delta^0, \dots, x_\Delta^d]\!], \qquad \Delta \in \mathscr{D},$$

dann ist $\mathscr{D}$ durch die Menge $\mathscr{X} = \left\{ x_\Delta^j : \Delta \in \mathscr{D}, j = 0, \dots, d \right\}$ und die Konnektivität der Simplizes definiert. In der Mengenschreibweise taucht jede Ecke x nur einmal auf, ganz egal, wie viele Δ und j es gibt, so daß $x = x_\Delta^j$ ist. Mit diesen Vorarbeiten können wir nun das nächste Resultat formulieren; der Beweis folgt [16].

Satz 6.2.6 (Spernersches Lemma). *Sei $\mathscr{D}$ eine Triangulierung des Einheitssimplex*[7] $\Delta^* := [\![0, e_1, \dots, e_d]\!]$ *und $f : \mathscr{X} \to \{0, \dots, d\}$ eine Belegung der Ecken dieser Triangulierung mit*

$$f\left(\mathscr{X} \cap \Delta_K^* \right) \subseteq K, \qquad K \subseteq \{0, \dots, d\}. \tag{6.2.4}$$

Dann gibt es mindestens ein $\Delta \in \mathscr{D}$ mit

$$f(\Delta) := \left\{ f(x_\Delta^j) : j = 0, \dots, d \right\} = \{0, \dots, d\}. \tag{6.2.5}$$

Bemerkung 6.2.7. Die Bedingung (6.2.4) bedeutet, daß die Belegung der Ecken $\mathscr{X}$ der Triangulierung kompatibel mit der Seitenstruktur ist, also daß insbesondere $f(0) = 0$ und $f(e_j) = j$ ist. Entsprechend finden sich auf der mit K indizierten Seite von Δ^* eben auch nur die in K enthaltenen Beschriftungen.

[6] Ist $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$, dann wählen wir einfach $K = K' = \emptyset$.

[7] Dieses Simplex ist isomorph zu $\mathbb{S}_d \subset \mathbb{R}^{d+1}$.

Beweis: Wir verwenden Induktion über d und zeigen, daß es sogar eine *ungerade* Anzahl von Simplizes $\Delta \in \mathscr{D}$ gibt, die (6.2.5) erfüllen.

Für $d = 1$ ist das einfach, denn hier haben wir es mit einer Zerlegung von $[0,1]$ in Teilintervalle zu tun, also mit $0 = x_0 < \cdots < x_n = 1$ und $f(x_j) \in \{0,1\}$; da $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ muss die Anzahl der Intervalle $[x_j, x_{j+1}]$ mit unterschiedlichem Vorzeichen am Rand ungerade sein.

Für den Induktionsschritt $d-1 \to d$ bezeichnen wir mit $\mathscr{D}^* \subset \mathscr{D}$ die Menge aller Simplizes der Zerlegung, die (6.2.5) erfüllen und sehen uns ausserdem die Menge $\mathscr{D}' \subset \mathscr{D}$ alle Simplizes $\Delta \in \mathscr{D}$ an, für die es ein K mit $\#K = d$ gibt, so daß

$$f(\Delta_K) = \{0, \ldots, d-1\}. \tag{6.2.6}$$

Offensichtlich ist $\mathscr{D}^* \subseteq \mathscr{D}'$. Mit $\{k\} = \overline{K} = \{0, \ldots, d\} \setminus K$ ergibt sich dann, daß

$$\Delta \in \mathscr{D}^* \qquad \Leftrightarrow \qquad f(\Delta_{\{k\}}) = d,$$

und falls $\Delta \notin \mathscr{D}^*$, dann ist $f(\Delta_{\{k\}}) \in \{0, \ldots, d-1\}$ und es gibt es zwei Indexmengen K, K', für die (6.2.6) erfüllt ist[8]. Die Anzahl N der $(d-1)$-dimensionalen Simplizes, die (6.2.6) erfüllen, ist damit

$$N = \#\mathscr{D}^* + 2\#\left(\mathscr{D}' \setminus \mathscr{D}^*\right).$$

Diese N Simplizes können im Inneren von Δ^* liegen, dann sind sie von der Form $\Delta \cap \Delta'$, $\Delta, \Delta' \in \mathscr{D}$, werden also doppelt gezählt, oder sie liegen am Rand von Δ^*, aber dann können sie wegen (6.2.4) nur zu $\Delta_{\{0,\ldots,d-1\}}$ gehören, wo es nach Induktionsvoraussetzun eine ungerade Anzahl sein muss. Also ist $N = 2N + 1$ für ein $M \ge 0$ und damit ist

$$\#\mathscr{D}^* = N - 2\left(\#\mathscr{D}' - \#\mathscr{D}^*\right) = 2M + 1 - 2\#\mathscr{D}' - 2\#\mathscr{D}^* = 2\left(M - \#\mathscr{D}' - \#\mathscr{D}^*\right) + 1$$

ungerade. □

Bemerkung 6.2.8. Das Spernersche Lemma hat zwar eigentlich einen topologischen Hintergrund, wird aber in der Kombinatorik gerne als ein *Färbungsproblem* dargestellt.

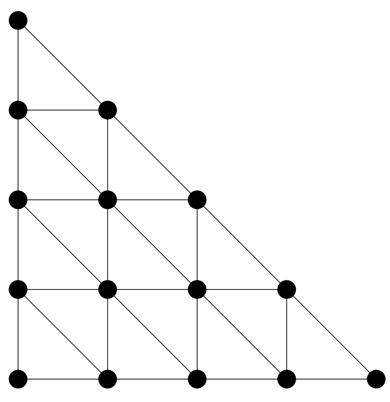

Abbildung 6.2.1: Triangularierung des Simplex in Subsimplizes, die alle dem Ausgangssimplex ähnlich sind, aber nur ein Viertel der Größe haben. Ähnliche Unterteilungen gibt es in beliebigen Dimensionen, sie sind dann nur ein wenig komplizierter, siehe [3, 29].

[8] Ein Index kommt in K doppelt vor.

Mit Hilfe des Spernerschen Lemmas können wir nun den Brouwerschen Fixpunktsatz recht einfach beweisen. Dazu brauchen wir eigentlich nur irgendeine Triangulierung $\mathscr{D}$ von $\mathbb{S}_m$ mit der Eigenschaft, daß

$$\max_{\Delta \in \mathscr{D}} \max_{x,x' \in \Delta} |x - x'| =: \rho < 1, \tag{6.2.7}$$

die Simplizes der Zerlegung sind also alle kleiner als das Originalsimplex, bei dem der Wert ja 1 beträgt. Ein einfaches Beispiel für $m = 2$ findet sich in Abb. 6.2.1.
Beweis von Satz 6.2.2: Wir wählen eine Triangulierung $\mathscr{D}$ on $\Delta^0 = \mathbb{S}_m$, die (6.2.7) erfüllt und betrachten für $x \in \mathscr{X}$ die Menge

$$J = J(x) = \left\{ j : f_j(x) \le x_j \right\}.$$

Diese Menge ist nichtleer, da $\sum_j f_j(x) = \sum_j x_j = 1$ ist, was $f_j(x) > x_j$, $j = 0, \dots, m$, unmöglich macht. Ist ausserdem $x \in \Delta_K^0$, so ersetzen wir J durch $J \cap K$, was immer noch nichtleer ist, da $f_j(x) = x_j = 0$ für $j \notin K$ ist und somit die $j$te Koordinate nichts zur Summe beiträgt. Insbesondere ist also $f(e_k) = k$, $k = 0, \dots, m$. Diese Belegung f erfüllt die Voraussetzungen der Spernerschen Lemmas und daher gibt es Subsimplex $\Delta^1 = [\![x^0, \dots, x^m]\!]$, so daß

$$f_j(x^j) \le x_j^j, \qquad j = 0, \dots, m. \tag{6.2.8}$$

Dieses Simplex Δ^1 können wir wieder triangulieren und erhalten eine Folge Δ^n von Simplizes mit Durchmesser ρ^n, deren Ecken immer (6.2.8) erfüllen. Da f stetig auf einer kompakten Menge, also gleichmäßig stetig, ist, gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ einen Index n, so daß

$$0 \le x_j^j - f_j(x^j) \le \varepsilon, \qquad j = 0, \dots, m, \qquad \Delta^1 = [\![x^0, \dots, x^m]\!], \tag{6.2.9}$$

und da die Dreiecke ineinander verschachtelt sind, konvergieren alle ihre Ecken gegen einen Punkt $x^* \in \mathbb{S}_m$, der $x_j^* - f_j(x^*) = 0$ erfüllt und daher der gesuchte Fixpunkt ist. □

Nachdem wir nun den Brouwerschen Fixpunktsatz bewiesen haben, ist auch der Beweis des Gleichgewichtssatzes von Nash komplettiert.

Bemerkung 6.2.9. Nash bemerkt in [23][9], daß man den Gleichgewichtssatz auch über den Fixpunktsatz von Kakutani beweisen könne, der aber nun wieder eine Verallgemeinerung von Brouwer ist. Durch Nutzung der stärkeren Aussage ist der Beweis des Gleichgewichtssatzes dann etwas einfacher, wobei die wesentliche Arbeit ja immer noch darin besteht, zu zeigen, daß der Fixpunkt auch ein Gleichgewichtspunkt ist.

[9]Dies ist nur eine Ankündigung eines Resultats auf einer Seite und weit davon entfernt, ein vollständiger Beweis zu sein.

7 Mehrpersonenspiele

Hundred years ago, the Art of War had been formulated. It was a book of rules [...] There were rules of position, of tactics, of the enforcement of discipline, of the correct organization of supply lines. The Art laid down the optimum course to take in every conceivable eventuality. It meant that warfare [...] consisted of short periods of activity followed by long periods of people trying to find things in the index.

(T. Pratchett, *Interesting times*)

Es wird langsam Zeit für die allgemeine Theorie der (kooperativen) Mehrpersonenspiele, bei denen es ganz wesentlich auf Koalitionsbildung ankommen wird. Natürlich reicht es eigentlich, sich auf *Nullsummenspiele* zu beschränken, da sich, wie schon mehrfach erwähnt, ja jedes Nicht–Nullsummenspiel ganz einfach dadurch in ein Nullsummenspiel verwandeln lässt, indem man einen weiteren Spieler einführt, der keine Strategien zur Verfügung hat, sondern nur die Gewinne der anderen Spieler kompensiert. Das betrifft aber nur die Regeln des Spiels und die Optimalstrategien, interessant wird es nun, welche Spieler sich vernünftig zu Koalitionen zusammefinden sollen und wann sich eine Koalition denn eigentlich lohnt. Und genau diese Fragestellung müssen wir jetzt formalisieren.

7.1 Einfache Dreipersonenspiele

Fangen wir einfach an, nämlich mit einem Dreipersonen–Nullsummenspiel; wie wir schon wissen, besteht der große Unterschied zum Zweipersonenspiel nun in der Möglichkeit der *Koalition*, also beginnen wir doch einfach mit einem Spiel, das sich *nur* mit diesem Aspekt befasst.

Beispiel 7.1.1 (Mehrheit). Jeder Spieler wählt die Nummer eines anderen Spielers. Wählen sich zwei Spieler gegenseitig, bilden also eine Koalition oder Mehrheit, dann erhalten sie die Auszahlung $\frac{1}{2}$, die der alleingelassene Spieler aufbringen muß, andernfalls erhält keiner etwas.

Die Strategiemengen für das Bei–Spiel 7.1.1, wie sie in Definition 2.1.1 eingeführt wurden, sind nun

$$S_1 = \{2,3\}, \qquad S_2 = \{1,3\}, \qquad S_3 = \{1,2\},$$

und die Auszahlungen sind

$$\boldsymbol{a}\,(2,3,1) = \boldsymbol{a}\,(3,1,2) = \boldsymbol{0}$$

bzw.

$$\boldsymbol{a}\,(2,1,\cdot) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}\,(3,\cdot,1) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}\,(\cdot,3,2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Das Spiel ist offensichtlich symmetrisch und intuitiv fair. Eine Art, das Spiel zu spielen, bestünde nun darin, daß jeder Spieler eine Münze wirft und je nach Ausgang die erste oder zweite Strategie wählt. Das führt zu insgesamt acht Möglichkeiten; die zugehörigen Auszahlungen sind dann

	(2,1,1)	(2,1,2)	(2,3,1)	(2,3,2)	(3,1,1)	(3,1,2)	(3,3,1)	(3,3,2)
Spieler 1	1/2	1/2	0	-1	1/2	0	1/2	-1
Spieler 2	1/2	1/2	0	1/2	-1	0	-1	1/2
Spieler 3	-1	-1	0	1/2	1/2	0	1/2	1/2

was für alle drei Spieler den Erwartungswert 0 liefert, der sich auch durch andere Strategien nicht verbessern läßt. Und doch gibt es eine Alternative zum unabhängigen Spiel, nämlich daß sich zwei Spieler *vor* dem Spiel darauf einigen, sich gegenseitig zu wählen und den dritten Spieler außen vor zu lassen: das liefert ihnen dann einen *sicheren* Gewinn von jeweils $\frac{1}{2}$.

Dieses Vorgehen ist von den Spielregeln nicht verboten, aber Verhandlungen bzw. Koalitionsbildung sind Aktionen, die *außerhalb* des eigentlichen Spiels mit seiner Auszahlungsfunktion stattfinden. Das ist ja auch nichts neues: Genau dasselbe Konzept hatten wir auch in Abschnitt 5.1, wo es genau darum ging, einen Vorteil zu erzielen, der sich innerhalb des Spiels, also mit *unabhängigen* Strategien nicht erzielen ließ.

Aber es gibt noch einen zweiten Aspekt der Dreipersonenspiele, nämlich *Kompensationen.* Nehmen wir an, Spieler 1 bekäme für eine Koalition mit Spieler 2 die Auszahlung $\frac{1}{2} + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, so daß für Spieler 2 nur noch $\frac{1}{2} - \varepsilon$ übrigbleibt, während sich alle anderen Koalitionen die Beute gerecht teilen. Das ist ein Dilemma für Spieler 1, denn die beiden Strategien sind ja

- Koalition mit Spieler 2: Das ist zwar für Spieler 1 sehr gut, aber Spieler 2 wird diese Koalition nie eingehen, da er damit ja immer schlechter fahren würde, als wenn er mit Spieler 3 koaliert.

- Koalition mit Spieler 3: Aus der Sicht von Spieler 1 ist das immer die schlechtere Wahl, also dominiert eigentlich die andere Strategie.

Wollen wir also die Methoden aus dem Zweipersonenspiel nicht komplett aufgeben, insbesondere das Konzept der dominanten Strategien[1], dann muss es Spieler 1 erlaubt sein, bei den Verhandlungen im Vorfeld Spieler 2 einen gewissen Betrag anzubieten, beispielsweise die Zahlung von ε.

Bemerkung 7.1.2. Mehrpersonenspiele beinhalten also Verhandlungen *außerhalb* der eigentlichen Spielregeln, die somit auch **nicht** in der Auszahlungsfunktion widergegeben sind, und diese Verhandlungen umfassen zwei Aspekte:

1. Koalitionen,

2. Kompensationen.

Daß dies durchaus der Realität entspricht sieht man immer wieder beim als „Koalitionsverhandlungen“ bezeichneten Postengeschacher, das außerhalb der Spielregeln des vom Gesetzgeber bestimmten einfachen Mehrheitsspiels „Demokratie“ bzw. „Regierungsbildung“ stattfindet.

[1]Mit dem man so schön und elegant das Spiel *Stein, Schere, Papier, Brunnen* auflösen konnte.

Im nächsten Schritt beschäftigen wir uns mit einer etwas komplexeren Version des einfachen Mehrheitsspiels, nämlich dem Fall unterschiedlicher Auszahlungen. Dieses Spiel kann man noch vollständig analysieren und genau das wurde auch in [26] gemacht; nachdem das ziemlich illustrativ ist, wollen wir's uns mal im Detail ansehen.

Beispiel 7.1.3 (Mehrheit mit variabler Auszahlung). Kooperieren Spieler 1 und 2, so erhalten sie von Spieler 3 den Betrag c, Spieler 1 und 3 zusammen erhalten den Betrag b und Spieler 1 muß, wenn er in der Minderheit ist, den Betrag a herausrücken. Natürlich wäre $a, b, c > 0$ eine vernünftige Annahme, aber selbst diese wollen wir im Moment (noch) nicht machen, um flexibel zu bleiben.

Wir betrachten die Situation aus der Perspektive[2] von Spieler 1, der zwei Möglichkeiten hat: Koalition mit Spieler 2 und Koalition mit Spieler 3. Nehmen wir an, Spieler 1 möchte einen Gewinn von x erzielen[3], dann kann Spieler 2 bei einer Koalition mit Spieler 1 mit dem Betrag $c - x$ und Spieler 3 bei einer entsprechenden Koalition mit dem Betrag $b - x$ rechnen. Wenn die Summe der beiden Beträge kleiner als a ist, dann wären Spieler 2 und Spieler 3 schlecht beraten, wenn sie mit Spieler 1 koalieren würden, denn dann könnten sie ja zusammen spielen und sich a passend aufteilen. Mit anderen Worten, es sollte auf jeden Fall

$$(b - x) + (c - x) \ge a \qquad \Rightarrow \qquad x \le \frac{-a + b + c}{2} \tag{7.1.1}$$

gelten. Sind also nun x, y, z die Beträge, die die drei Spieler mindestens erreichen wollen, dann sollten diese die Ungleichungen

$$\begin{aligned} x &\le \frac{-a+b+c}{2}, \\ y &\le \frac{a-b+c}{2}, \\ z &\le \frac{a+b-c}{2}, \end{aligned}$$

erfüllen, um Koalitionen überhaupt erst einmal möglich zu machen. Dasselbe gilt *mit Gleichheit* für die maximalen fairen Auszahlungen α, β, γ, die andererseits auch wieder

$$\alpha + \beta = c, \qquad \alpha + \gamma = b, \qquad \beta + \gamma = a, \tag{7.1.2}$$

erfüllen müssen, schließlich handelt es sich ja um ein Nullsummenspiel. Damit es sich für die Spieler lohnt, eine Koalition einzugehen, sollte natürlich

$$\mathbf{0} \le \begin{bmatrix} \alpha - (-a) \\ \beta - (-b) \\ \gamma - (-c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + a \\ \beta + b \\ \gamma + c \end{bmatrix} = (\alpha + \beta + \gamma)\, \mathbf{1},$$

also

$$0 \le \alpha + \beta + \gamma = \frac{-a+b+c}{2} + \frac{a-b+c}{2} + \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c}{2} =: \frac{\delta}{2} \tag{7.1.3}$$

sein.

[2] Das reicht natürlich völlig, denn bis auf die konkreten Zahlen, die wir ja in keinster Weise angeordnet haben, ist dieses einfache Mehrheitsspiel vollkommen symmetrisch.

[3] Keine Voraussetzungen an das Vorzeichen von x!

Lemma 7.1.4. *Im Falle eines Nullsummenspiels ist* $\delta \geq 0$.

Beweis: Eine Koalition aus den Spielern 1 und 2 kann von Spieler 3 den Betrag c gewinnen und nicht mehr. Andererseits ist der garantierte Mindestgewinn von Spieler 1 der Wert $-a$ (nämlich wenn er mit niemandem koaliert) und, analog, kann Spieler 2 ohne Hilfe von außen $-b$ bekommen; zusammen ergibt das also $-a-b$ und dieser Wert muß $\leq c$ sein[4], also ist

$$c \geq -(a+b) \qquad \Rightarrow \qquad a+b+c \geq 0,$$

wie behauptet. □

Tatsächlich spielt diese Größe δ eine ganz bedeutende Rolle: Ist nämlich $\delta = 0$, dann ist

$$\alpha = \frac{-a+b+c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{\delta}{2} - a = -a, \qquad \beta = -b, \qquad \gamma = -c,$$

und jeder Spieler erhält denselben zu erwartenden Betrag, ganz egal ob er koaliert oder nicht. Umgekehrt ist die „Motivation“ für die Spieler, eine Koalition einzugehen, gerade der Betrag $\delta/3$, der für *alle* Spieler gleich ist. Betrachtet man die modifizierten Auszahlungen

$$a' = -a + \frac{\delta}{3} = \alpha - \frac{\delta}{6}, \qquad b' = -b + \frac{\delta}{3} = \beta - \frac{\delta}{6}, \qquad c' = -c + \frac{\delta}{3} = \gamma - \frac{\delta}{6},$$

dann ist

$$\delta' = a' + b' + c' = -(a+b+c) + \delta = 0$$

und wir können folgendes festhalten.

Bemerkung 7.1.5. Das Spiel hat für die Spieler die einfachen Werte[5] a', b', c' und der Gewinn durch Koalitionen beträgt $\delta/6$. Umgekehrt verliert der Spieler, der von der Koalition ausgeschlossen wird, den Betrag $\delta/3$. Dieser Wert ist derselbe für alle Spieler.

Nochmals: Die Bildung von Koalitionen lohnt sich nach den obigen Überlegungen genau dann, wenn sich durch die Koalitionen mehr erreichen lässt als durch Einzelspiel, also genau dann, wenn $\delta > 0$ ist. Deswegen heißt ein Spiel *wesentlich*[6], wenn $\delta > 0$ ist und *unwesentlich* für $\delta = 0$. Das wird eine zentrale Unterscheidung von Mehrpersonenspielen werden.

7.2 Drei Personen und der volle Formalismus

Schön langsam werden wir noch etwas mutiger und sehen uns jetzt einmal den vollständigen Fall eines Dreipersonenspiels an. Dabei haben wir jetzt die drei Strategiemengen S_1, S_2, S_3 und die Auszahlungsfunktion $\boldsymbol{a} : S_1 \times S_2 \times S_3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{1}^T \boldsymbol{a} = 0$. Für ein Strategiepaar s_1, s_2 und eine „Gegenstrategie“ s_3 erhält dann eine Koalition aus den Spielern 1 und 2 von Spieler 3 den Betrag

$$a_1(s_1, s_2, s_3) + a_2(s_1, s_2, s_3) = -a_3(s_1, s_2, s_3),$$

und wie die beiden den untereinander aufteilen, das ist eine Frage der Koalitionsbildung, die wieder außerhalb des eigentlichen Spiels geregelt werden muß. Eine *gemischte Strategie*

[4] Denn mehr rückt Spieler 3 ja nicht raus.
[5] Im Original [26] als *basic values* bezeichnet.
[6] Im Original *„essential“/„inessential“*.

der Koalition $K = \{1, 2\}$ ist nun, eine gemeinsame gemischte Strategie für jedes Strategiepaar $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$

$$\boldsymbol{p}_K = \left(p^K_{j,k} \ : \ 1 \le j \le m_1, 1 \le k \le m_2 \right) \in \mathbb{S}_{m_1 m_2}.$$

Die Auszahlung dieser gemischten Strategien ist nun für eine gemischte Strategie von Spieler 3 aus der Sicht der Koalition der Wert

$$a\left(\boldsymbol{p}^K, \boldsymbol{p}_3\right) = \sum_{k_1=1}^{m_1} \sum_{k_2=1}^{m_2} \sum_{k_3=1}^{m_3} \left[a_1\left(k_1, k_2, k_3\right) + a_2\left(k_1, k_2, k_3\right)\right] p^K_{k_1,k_2} \, p_{k_3}.$$

Diese Formel können wir übrigens auch als ein Zweipersonenspiel auffassen, bei dem die Koalition K gegen Spieler 3 spielt, und erhalten so, daß

$$c = \max_{\boldsymbol{p}^K} \min_{\boldsymbol{p}_3} a\left(\boldsymbol{p}^K, \boldsymbol{p}_3\right) = \min_{\boldsymbol{p}_3} \max_{\boldsymbol{p}^K} a\left(\boldsymbol{p}^K, \boldsymbol{p}_3\right)$$

sein muss. Die anderen beiden Werte, a und b, leitet man analog aus dem Spiel ab, und kann dann δ sowie den potentiellen Gewinn aus dem Spiel berechnen.

Ein Wort noch zu den gemeinsamen gemischten Strategien $\boldsymbol{p}^K$ der Koalition: Sie erfüllen ja per definitionem $p^K_{jk} \ge 0$ und

$$\sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} p^K_{j,k} = 1,$$

und natürlich ist jedes[7]

$$\boldsymbol{p}^K = \boldsymbol{p}_1 \otimes \boldsymbol{p}_2 \qquad \text{d.h.} \qquad p^K_{jk} = p^1_j p^2_k$$

auch so eine gemeinsame Strategie; das ist wieder der unabhängige Fall. Da die Ecken des Simplex $\mathbb{S}_{m_1 m_2}$ von den Punkten $\boldsymbol{e}_{jk} = \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k$ gebildet werden, ist auch jede gemeinsame Strategie als Konvexkombination von unabhängigen Strategien darstellbar: Das ist nun wieder gerade das Konzept der Kooperation aus Abschnitt 5.1. Genauer sehen wir uns das dann an, wenn wir zu den Mehrpersonenspielen kommen.

7.3 Mehrpersonenspiele und Koalitionen

Jetzt aber endlich zum allgemeinen Fall, einem n–Personenspiel mit Strategiemengen $S_1, \dots, S_n$ und Auszahlungsfunktion $\boldsymbol{a}$ mit$\boldsymbol{1}^T \boldsymbol{a} \equiv 0$.

Definition 7.3.1. Eine *Koalition K* ist eine Teilmenge von $\mathbb{N}_n$; als *Gegenkoalition* bezeichnen wir ihr Komplement $\overline{K} := \mathbb{N}_n \setminus K$. Zu einer Koalition K seien

$$S_K := \bigotimes_{j \in K} S_j \qquad \text{und} \qquad m_K := \prod_{j \in K} m_j$$

die Strategiemenge der Koalition bzw. deren Mächtigkeit. Eine (gemeinsame) *Strategie* der Koalition ist ein Vektor $\sigma \in S_K$ und eine gemischte Strategie ein Vektor $\boldsymbol{p}_K = \left(p^K_\sigma \ : \ \sigma \in S_K\right)$, für den

$$p^K_\sigma \ge 0, \qquad \sum_{\sigma \in S_K} p^K_\sigma = 1,$$

gilt.

[7] Hier taucht wieder einmal das Kronecker–Produkt auf, obwohl für unsere Zwecke hier die einfache Identität $\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}\, \boldsymbol{q}^T$ ausreichend ist.

Da $\#S_K = m_K$ ist, könnten wir die gemischten Strategien auch in $\mathbb{S}_{m_K}$ ansiedeln, und in der Tat ist das wieder eine Multiindizierung p_σ^K, nur fassen wir die Einträge von σ dann halt nicht nur als Strategien, sondern auch als *Indizes* von Strategien auf. Die gemischten Strategien, genauer, deren Wahrscheinlichkeitsbelegungen, die die Spieler unabhängig voneinander ohne Absprache erreichen können, sind von der Form

$$p_\sigma^K = \prod_{j \in K} p_{\sigma_j}^j, \qquad \boldsymbol{p}_j = \left(p_1^j, \dots, p_{m_j}^j\right), \tag{7.3.1}$$

und bilden wieder einmal nur eine *echte* Teilmenge $\mathbb{I}_{m_K}$ von $\mathbb{S}_{m_K}$.

Beispiel 7.3.2. Mit $K = \{1,2\}$ und $m_1 = m_2 = 2$, also $\boldsymbol{p}_1 = (\alpha, 1-\alpha)$ und $\boldsymbol{p}_2 = (\beta, 1-\beta)$ erhalten wir, daß

$$\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ \alpha(1-\beta) \\ (1-\alpha)\beta \\ (1-\alpha)(1-\beta) \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{p_{11}}{p_{12}} = \frac{p_{21}}{p_{22}} = \frac{\beta}{1-\beta},$$

und diese Eigenschaft haben natürlich nicht alle $\boldsymbol{p} \in \mathbb{S}_4$.

Aber natürlich hilft uns hier wieder die Kooperation.

Übung 7.3.1 Zeigen Sie, daß sich nicht alle gemischten Strategien $\boldsymbol{p}_K \in \mathbb{S}_{m_K}$ in der Form (7.3.1) darstellen lassen. *Hinweis:* Es genügt bereits, den einfachsten Fall $\#K = 2$ und $m_1 = m_2 = 2$ zu betrachten. ◊

Lemma 7.3.3. *Jede gemischte Strategie der Koalition lässt sich durch Kooperation bilden, genauer:* $[\![\mathbb{I}_{m_K}]\!] = \mathbb{S}_{m_K}$.

Beweis: Die Idee kennen wir inzwischen: Für jede reine Strategie σ gibt es eine zugehörige gemischte Strategie

$$\boldsymbol{p}_\sigma = \bigotimes_{j=1}^{\#K} \boldsymbol{e}_{\sigma_j}^j,$$

und dann ist

$$\boldsymbol{p}_K = \sum_{\sigma \in S_K} p_\sigma^K \, \boldsymbol{p}_\sigma$$

eine Konvexkombination dieser Strategien, die sich durch vorherige Verhandlung und ein gemeinsames Zufallsexperiment erreichen lässt. □

Für eine Koalition K und Gegenkoalition $\overline{K}$ wird das Spiel dann zum Zweipersonenspiel zwischen diesen Koalitionen, mit Auszahlungen[8]

$$\boldsymbol{a}(\sigma, \tau), \qquad \sigma \in S_K, \ \tau \in S_{\overline{K}}.$$

Um die Auszahlungen auch noch zu einer Zahl zu machen betrachten wir den *charakteristischen Vektor* $\boldsymbol{c}_K$ zu K, der definiert ist durch

$$(\boldsymbol{c}_K)_j = \chi_K(j) = \begin{cases} 1, & j \in K, \\ 0, & j \notin K, \end{cases}$$

[8] Wenn nötig nach passender Umnumerierung der Spieler.

und erhalten die Auszahlung aus Sicht von K als

$$\boldsymbol{c}_K^T \boldsymbol{a}(\sigma,\tau) = -\boldsymbol{c}_{\overline{K}}^T \boldsymbol{a}(\sigma,\tau). \tag{7.3.2}$$

Die Auszahlungsmatrix ist also

$$\boldsymbol{A}_K = \left[\boldsymbol{c}_K^T \boldsymbol{a}(\sigma,\tau) \;:\; \sigma \in S_K,\, \tau \in S_{\overline{K}}\right], \tag{7.3.3}$$

und die erwartete Auszahlung für (gemeinsame) gemischte Strategien

$$a_K\left(\boldsymbol{p}_K, \boldsymbol{p}_{\overline{K}}\right) = \boldsymbol{p}_K^T \boldsymbol{A}_K\, \boldsymbol{p}_{\overline{K}}. \tag{7.3.4}$$

Der nächste Begriff ist nur dank der Zweipersonentheorie, genauer dank des Minimaxtheorems 2.3.1, vernünftig definiert.

Definition 7.3.4 (Wert einer Koalition). Der *Wert* einer Koalition $K \subset \mathbb{N}_n$ ist der Wert des von K und $\overline{K}$ gebildeten Zweipersonenspiels, also

$$v(K) = \max_{\boldsymbol{p}_K} \min_{\boldsymbol{p}_{\overline{K}}} a\left(\boldsymbol{p}_K, \boldsymbol{p}_{\overline{K}}\right) = \min_{\boldsymbol{p}_{\overline{K}}} \max_{\boldsymbol{p}_K} a\left(\boldsymbol{p}_K, \boldsymbol{p}_{\overline{K}}\right). \tag{7.3.5}$$

Die Funktion $v : \mathscr{P}(\mathbb{N}_n) \to \mathbb{R}$ heißt auch *charakteristische Funktion* des Spiels; hierbei bezeichnet $\mathscr{P}(X)$ die *Potenzmenge* von X, also die Menge aller Teilmengen von X.

Die Aufteilung des Gewinns innerhalb einer Koalition ist immer noch eine ungeklärte Frage und wird es auch noch etwas bleiben. Hier wollen wir uns zuerst einmal ein paar Eigenschaften des Wertes eines Spiels ansehen.

Proposition 7.3.5. *Der Wert von Koalitionen hat die folgenden Eigenschaften:*

1. $v(\emptyset) = v(\mathbb{N}_n) = 0$.
2. $v(K) = -v\left(\overline{K}\right)$.
3. *Sind* $K, K' \subset \mathbb{N}_n$ *mit* $K \cap K' = \emptyset$, *dann ist*[9]

$$v(K \cup K') \ge v(K) + v(K'). \tag{7.3.6}$$

4. *Sind* $K_1, \dots, K_k$ *eine Partition von* $\mathbb{N}_n$, *das heißt,*

$$K_1 \cup \dots \cup K_k = \mathbb{N}_n, \qquad K_j \cap K_{j'} = \emptyset, \quad j \ne j',$$

dann ist

$$\sum_{j=1}^{k} v\left(K_j\right) \le 0. \tag{7.3.7}$$

Beweis: Die leere Menge enthält niemanden und kann daher auch nur Auszahlung 0 bekommen. Andererseits ist für $K = \mathbb{N}_n$ auch $\boldsymbol{c}_K = \boldsymbol{1}$ und damit

$$v(K) = \max_{\boldsymbol{p} \in \mathbb{S}_{m_K}} \sum_{\sigma \in S_K} p_\sigma^K \underbrace{\boldsymbol{1}^T \boldsymbol{a}(\sigma)}_{=0} = 0,$$

[9]... das Ganze mehr als die Summe seiner Teile.

womit 1) bewiesen ist. Um 2) zu verifizieren setzt man (7.3.2) via (7.3.3) in (7.3.4) ein und erhält die Auszahlungsfunktion $a\left(\boldsymbol{p}^{\overline{K}}, \boldsymbol{p}^{K}\right)$ aus der Sicht von $\overline{K}$ als $-a\left(\boldsymbol{p}^{K}, \boldsymbol{p}^{\overline{K}}\right)$. Sei $\overline{K} = \mathbb{N}_n \setminus (K \cup K')$ die Gegenkoalition zu $K \cup K'$ und seien $\boldsymbol{p}_*^K$ bzw. $\boldsymbol{p}_*^{K'}$ die Optimalstrategien für K gegen $K' \cup \overline{K}$ bzw. für K' gegen $K \cup \overline{K}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
v(K) + v(K') &= \min_{\boldsymbol{p}^{K'\cup\overline{K}}} \boldsymbol{c}_K^T \boldsymbol{a}\left(\boldsymbol{p}_*^K, \boldsymbol{p}^{K'\cup\overline{K}}\right) + \min_{\boldsymbol{p}^{K\cup\overline{K}}} \boldsymbol{c}_{K'}^T \boldsymbol{a}\left(\boldsymbol{p}_*^{K'}, \boldsymbol{p}^{K\cup\overline{K}}\right) \\
&\le \min_{\boldsymbol{p}^{\overline{K}}} \boldsymbol{c}_K^T \boldsymbol{a}\left(\boldsymbol{p}_*^K, \boldsymbol{p}_*^{K'}, \boldsymbol{p}^{\overline{K}}\right) + \min_{\boldsymbol{p}^{\overline{K}}} \boldsymbol{c}_{K'}^T \boldsymbol{a}\left(\boldsymbol{p}_*^K, \boldsymbol{p}_*^{K'}, \boldsymbol{p}^{\overline{K}}\right) \\
&= \underbrace{\left(\boldsymbol{c}_K + \boldsymbol{c}_{K'}\right)^T}_{=\boldsymbol{c}_{K\cup K'}^T} \min_{\boldsymbol{p}^{\overline{K}}} \boldsymbol{a}\left(\boldsymbol{p}_*^K, \boldsymbol{p}_*^{K'}, \boldsymbol{p}^{\overline{K}}\right) \\
&\le \max_{\boldsymbol{p}^{K\cup K'}} \min_{\boldsymbol{p}^{\overline{K}}} \boldsymbol{c}_{K\cup K'}^T \min_{\boldsymbol{p}^{\overline{K}}} \boldsymbol{a}\left(\boldsymbol{p}_*^{K\cup K'}, \boldsymbol{p}^{\overline{K}}\right) \\
&= v\left(K \cup K'\right).
\end{aligned}$$

Der Beweis von 4) ist wieder einfacher und zeigt durch Iteration von (7.3.6) und Verwendung von 1), daß

$$\sum_{j=1}^{k} v\left(K_j\right) \le v\left(K_1 \cup \cdots \cup K_k\right) = v\left(\mathbb{N}_n\right) = 0,$$

wie behauptet. □

Bemerkung 7.3.6. Für $j \in \mathbb{N}_n$ spielen die Größen

$$v_j := v(j) = v(\{j\}) = \max_{\boldsymbol{p}_j \in \mathbb{S}_{m_j}} \min_{\boldsymbol{p}_K \in \mathbb{S}_{m_K}} a_j\left(\boldsymbol{p}_j, \boldsymbol{p}_K\right), \qquad K := \mathbb{N}_n \setminus \{j\}, \tag{7.3.8}$$

eine ganz besondere Rolle, denn das ist die *Mindestauszahlung*, die Spieler j *garantiert* erhält, selbst wenn sich alle anderen gegen ihn verbünden und die für ihn schlechteste Strategie spielen, und die er erreichen kann, indem er *unabhängig* von seinen Mitspielern[10] eine Strategie $\boldsymbol{p}^* \in \mathbb{S}_{m_j}$ wählt.

Für jeden der Spieler lohnt es sich also nur dann, einer Koalition beizutreten, wenn ihm diese Koalition gegenüber dem Alleinspiel einen Vorteil bringt. Da das für jeden Spieler gilt, wird eine Koalition nur dann eingegangen werden, wenn

$$v(K) \ge \sum_{j\in K} v(j) \tag{7.3.9}$$

ist, denn sonst bekommt mindestens ein Spieler weniger, als wenn er allein spielen würde. Die Bedingung (7.3.9) ist aber automatisch erfüllt, denn sie folgt direkt aus (7.3.6): Die einelementigen Mengen sind trivialerweise disjunkt. Eine gute Koalition ist aber mit Sicherheit eine, die den Spielern im Vergleich zum Einzelspiel einen Mehrwert bietet, bei der also die obige Ungleichung *strikt* gilt.

Definition 7.3.7 (Gewinnkoalition). Eine Koalition $K \subseteq \mathbb{N}_n$ heißt *Gewinnkoalition*, wenn sie

$$v(K) > \sum_{j\in K} v(j) \tag{7.3.10}$$

[10] Das klingt freundlicher als „Gegner".

erfüllt. Dies bezeichnet man[11] auch als *Konvexität* der Menge K, Mengen mit Gleichheit in (7.3.9), also $v(K) = \sum_{j \in K} v(j)$, werden *flach* genannt.

Addiert man zur Auszahlungsfunktion $\boldsymbol{a}\,(s_1, \dots, s_n)$ einen von allen Strategien unabhängigen Wert $\boldsymbol{b}$, dann ist das resultierende Spiel zur Auszahlungsfunktion $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ genau dann ein Nullsummenspiel, wenn

$$0 = \mathbf{1}^T \boldsymbol{a}' = \mathbf{1}^T\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \mathbf{1}^T \boldsymbol{b}$$

ist. Für $j \in \mathbb{N}_n$ ist dann

$$v'(j) := v'\,(\{j\}) = v(j) + b_j$$

und die Wahl

$$b_j = -v(j) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} v(k), \qquad j \in \mathbb{N}_n, \tag{7.3.11}$$

sorgt dafür, daß

$$v'(j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} v(k) \qquad \text{und} \qquad \mathbf{1}^T \boldsymbol{b} = -\sum_{k=1}^{n} v(k) + \sum_{k=1}^{n} v(k) = 0, \qquad j \in \mathbb{N}_n. \tag{7.3.12}$$

Andererseits ist das Spiel zu $\boldsymbol{a}'$ aber äquivalent zu $\boldsymbol{a}$ und daher sind optimale Strategien des einen auch optimale Strategien des anderen. Mit anderen Worten: Unter allen *strategisch äquivalenten* Varianten des Spiels haben wir so diejenige gewählt, bei der alle Spieler als „Einzelkämpfer" denselben Gewinn bzw. Verlust erreichen können, was natürlich auch wieder eine Form von Symmetrie ist.

Definition 7.3.8 (Reduziertes Spiel). Das Spiel basierend auf $\boldsymbol{a}'$ und die zugehörige Wertfunktion v' heißen *reduzierte Form* von $\boldsymbol{a}$ bzw. von v, wenn

$$v'(1) = \cdots = v'(n) =: -\gamma. \tag{7.3.13}$$

ist.

Der Wert γ hängt nun wirklich nur vom Spiel ab und bildet daher eine wichtige Beschreibungsgröße des Spiels. Daß dem so ist, das folgt aus der Tatsache, daß wir die Forderungen

$$v'(j) = v'(j+1) \qquad \Leftrightarrow \qquad b_j - b_{j+1} = v(j+1) - v(j), \qquad j = 1, \dots, n-1,$$

und $\mathbf{1}^T \boldsymbol{b} = 0$ in dem linearen Gleichungssystem

$$\boldsymbol{M}_n \boldsymbol{b} := \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} v(2) - v(1) \\ \vdots \\ v(n) - v(n-1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

zusammenfassen können, und die Determinante der zugehörigen Matrix ist, per Entwicklung nach der ersten Spalte und Induktion

$$\det \boldsymbol{M}_n = \det \boldsymbol{M}_{n-1} + (-1)^{n-1} \det \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & & & \\ 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{=(-1)^{n-1}} = n - 1 + 1 = n.$$

[11] Genauer: [26].

Damit gibt es *genau* eine reduzierte Form des Spiels und auch die Zahl γ ist eindeutig und wohldefiniert.

Lemma 7.3.9. *Die Größe γ aus* (7.3.13) *erfüllt $\gamma \ge 0$ und es gilt*

$$-k\,\gamma \le v'(K) \le (n-k)\,\gamma, \qquad k = \#K. \tag{7.3.14}$$

Ist $\#K = 1$, dann ist $v'(K) = -\gamma$, ist hingegen $v'(K) = n-1$, dann ist $v'(K) = \gamma$. In den beiden Extremalfällen tritt also einmal Gleichheit bei der unteren und einmal Gleichheit bei der oberen Abschätzung ein.

Die Beobachtung $\gamma \ge 0$ hat eine interessante Konsequenz: In der von Haus aus ausgeglichenen *reduzierten* Form eines Spiels kann kein Spieler allein wirklich etwas gewinnen, in diesem Fall sind Koalitionen zum Gewinnen *nötig.*
Beweis: Nach (7.3.6) und Eigenschaft 1 von Proposition 7.3.5 ist

$$-n\,\gamma = \sum_{j=1}^{n} v(j) \le v\left(\mathbb{N}_n\right) = 0,$$

also in der Tat $\gamma \ge 0$. Analog ist

$$v'(K) \ge \sum_{j \in K} v'(j) = -\#K\,\gamma$$

und schließlich auch

$$v'(K) = -v'\left(\overline{K}\right) \le -\sum_{j \in \overline{K}} v'(j) = (n - \#K)\,\gamma.$$

Daß $v'(K) = -\gamma$ gilt wenn $\#K = 1$ ist, ist einfach die Definition von γ, ist hingegen $\#K = n-1$, also $K = \mathbb{N}_n \setminus \{j\}$, dann ergibt Eigenschaft 2) aus Proposition 2, daß

$$v'(K) = -v'\left(\mathbb{N}_n \setminus K\right) = -v'(j) = \gamma$$

sein muss. □

Noch einmal, weil es so wichtig ist:

> *Das Spiel und seine reduzierte Form sind, was die Strategien angeht,* ***vollkommen*** *äquivalent. Es genügt also für die Untersuchung eines Spiels eigentlich immer, die* ***reduzierte*** *Variante des Spiels zu betrachten.*

Definition 7.3.10. Das Spiel heißt *wesentlich*, wenn $\gamma > 0$ ist und *unwesentlich*, wenn $\gamma = 0$ ist.

Und die Begriffe sind tatsächlich sinnvoll gewählt, denn die Quintessenz des Ganzen ist die Tatsache, daß unwesentliche Spiele keine Gewinnkoalitionen haben und damit eher uninteressant sind.

Proposition 7.3.11. *Ein Spiel mit $n > 2$ Spielern ist genau dann unwesentlich, wenn*

$$v\left(K \cup K'\right) = v(K) + v\left(K'\right), \qquad K, K' \subseteq \mathbb{N}_n,\ K \cap K' = \emptyset. \tag{7.3.15}$$

Beweis: Nach (7.3.12) ist

$$\gamma = -v'(j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} v(k), \qquad j \in \mathbb{N}_n.$$

Außerdem gilt für alle $K \subseteq \mathbb{N}_n$

$$\begin{aligned}
v'(K) &= \max_{\boldsymbol{p}_K} \min_{\boldsymbol{p}_{\overline{K}}} \sum_{\sigma \in S_K} \sum_{\tau \in S_{\overline{K}}} \boldsymbol{c}_K^T \boldsymbol{a}'(\sigma,\tau) p_\sigma^K p_\tau^{\overline{K}} \\
&= \max_{\boldsymbol{p}_K} \min_{\boldsymbol{p}_{\overline{K}}} \sum_{\sigma \in S_K} \sum_{\tau \in S_{\overline{K}}} \boldsymbol{c}_K^T \left(\boldsymbol{a}(\sigma,\tau) + \boldsymbol{b}\right) p_\sigma^K p_\tau^{\overline{K}} \\
&= v(K) + \boldsymbol{c}_K^T \boldsymbol{b} = v(K) + \sum_{j \in K} b_j = v(K) + \sum_{j \in K} \left(-v(j) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} v(k) \right) \\
&= v(K) - \sum_{j \in K} v(j) + \# K \, \gamma,
\end{aligned}$$

also

$$v'(K) - \# K \, \gamma = v(K) - \sum_{j \in K} v(j). \tag{7.3.16}$$

Ist das Spiel nun unwesentlich, also $\gamma = 0$, dann ist wegen (7.3.14) auch $v'(K) = 0$ für alle $K \subseteq \mathbb{N}_n$ und somit ist

$$0 = v(K) - \sum_{j \in K} v(j) \qquad \Rightarrow \qquad v(K) = \sum_{j \in K} v(j), \tag{7.3.17}$$

woraus (7.3.15) unmittelbar folgt. Ist umgekehrt (7.3.15) und damit auch (7.3.17) erfüllt, dann liefert (7.3.16) für alle $K \subseteq \mathbb{N}_n$, daß $v'(K) - \# K \, \gamma = 0$ sein muß. Wählen wir speziell K als $n-1$–elementige Teilmenge, dann ist nach Lemma 7.3.9 $v'(K) = \gamma$, also

$$0 = v'(K) - \# K \, \gamma = \gamma - (n-1)\gamma = (2-n)\, \gamma$$

und da wir es es mit einem Mehrpersonenspiel zu tun haben und somit $n > 2$ ist, folgt $\gamma = 0$. □

Bemerkung 7.3.12 (Wesentlichkeit).

1. Ein wesentliches Spiel muss mindestens drei Spieler haben. Diese intuitiv klare Aussage[12] folgt aus der Tatsache, daß wir für $n = 2$ und $\# K = 1$ vor einer Koalition mit einem und $n-1$ Teilnehmern stehen, die laut Lemma 7.3.9 die Bedingungen

   $$-\gamma = v'(K) = \gamma \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = 0$$

   erfüllen muss: Das Spiel ist unwesentlich.

2. Reduzierte Dreipersonenspiele sind durch γ bereits vollständig determiniert: Von Haus aus ist $v'(\emptyset) = v'(K) = 0$, per definitionem ist $v'(j) = -\gamma$, und für jede Koalition K aus zwei Spielern gilt

   $$v'(K) = -v'(j) = \gamma, \qquad K = \mathbb{N}_3 \setminus \{j\},$$

[12] Wie bitte sollen bei einem Zweipersonen–**Nullsummenspiel** Koalitionen etwas bringen? Die einzige Kooperation bestünde darin, es bleiben zu lassen (also keiner gewinnt etwas und keiner verliert etwas) und lieber einen Kaffee zu trinken.

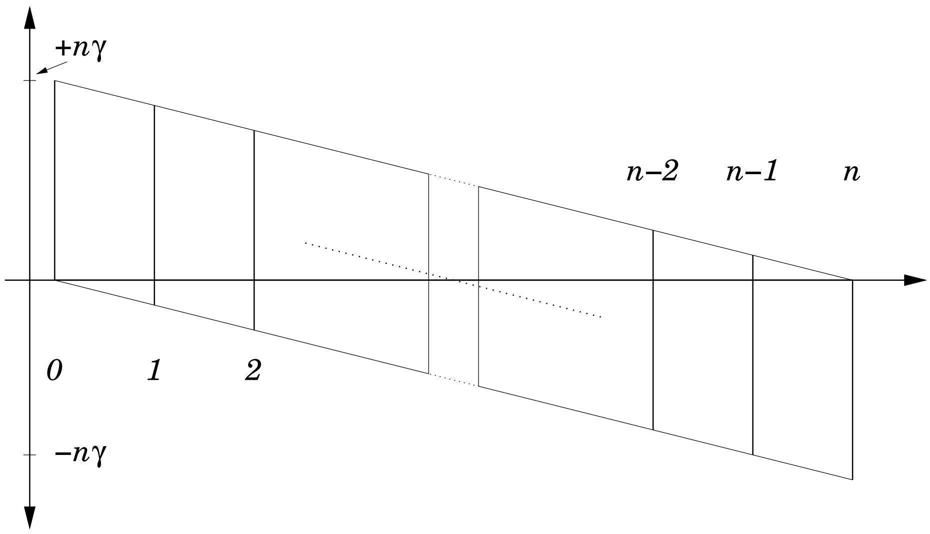

Abbildung 7.3.1: Die Bandbreite für $v'(K)$ in Abhängigkeit von $\#K$ gemäß (7.3.14).

weswegen

$$v'(K) = \begin{cases} 0, & \#K = 0, 3, \\ -\gamma, & \#K = 1, \\ \gamma, & \#K = 2, \end{cases}$$

sein muss.

3. So richtig beginnt der Spaß also erst bei Vierpersonenspielen, bei denen zwar immer noch

$$v'(K) = \begin{cases} 0, & \#K = 0, 4, \\ -\gamma, & \#K = 1, \\ \gamma, & \#K = 3, \end{cases}$$

zu sein hat, aber bei den Zweipersonenkoalitionen wird es jetzt interessant, denn die können nun wirklich beliebige Werte zwischen -2γ und 2γ annehmen.

4. *Fazit:* Die n–Personen–Theorie beginnt eigentlich erst bei $n = 4$.

7.4 Das Aufteilen der Beute

Während wir uns bisher über die inneren Aspekte des Spiels Gedanken gemacht haben, also das, was durch die Spielregeln in Form der Auszahlungsfunktion festgelegt wurde, wird es jetzt auch einmal Zeit, sich die „äußeren“ Aspekte anzusehen, bei denen es darum geht, welche Koalitionen gebildet werden sollen. Auch hier erst einmal etwas Terminologie.

Definition 7.4.1 (Aufteilungen). Ein Vektor $\alpha \in \mathbb{R}^n$ heißt *Aufteilung*[13], wenn

$$\alpha \ge \boldsymbol{v} := \begin{bmatrix} v(1) \\ \vdots \\ v(n) \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{1}^T \alpha = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 0 \tag{7.4.1}$$

[13] Im Original [26] *„Imputation“*, was laut `www.quickdic.org` eigentlich mit „Beschuldigung“ zu übersetzen wäre.

ist. Eine Koalition $K \subseteq \mathbb{N}_n$ ist *wirksam* für α, wenn

$$v(K) \geq \boldsymbol{c}_K^T \alpha = \sum_{j \in K} \alpha_j \tag{7.4.2}$$

gilt.

Eine Aufteilung gibt also für jede Koalition, die für sie wirksam ist, eine Möglichkeit an, den erreichten Gewinn (bzw. Verlust) so aufzuteilen, daß jeder Spieler mindestens das bekommt, was ihm durch ein Spiel „allein gegen alle“ garantiert ist, und er sich somit durch die Koalition zumindest nicht verschlechtert. Wir sind sogar großzügig, denn es muss noch nicht einmal der gesamte Gewinn aufgeteilt werden, es steht ja nur „$\geq$“ in (7.4.2).

Definition 7.4.2 (Dominanz). Eine Aufteilung α *dominiert* eine Aufteilung β, in Zeichen $\alpha \succ \beta$, wenn es eine Koalition $K \neq \emptyset$ gibt, die für α wirksam ist und für die

$$\alpha_j > \beta_j, \qquad j \in K, \tag{7.4.3}$$

gilt.

Vorsicht! Dominanz ist keine *Ordnungsrelation*, es fehlt ihr nämlich an der Transititivität. So kann es durchaus vorkommen, daß *gleichzeitig* $\alpha \succ \beta$ und $\beta \succ \alpha$ erfüllt sind, ganz einfach, indem (7.4.3) in beiden Fällen, aber für unterschiedliche Koalitionen K erfüllt ist. Wäre nun die Dominanz transitiv, dann wäre

$$\alpha \succ \beta \succ \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \succ \alpha$$

und es gäbe eine nichtleere Koalition K, so daß $\alpha_j > \alpha_j$ für alle $j \in K$ ist, was einen Widerspruch darstellt.

Übung 7.4.1 Finden Sie ein Paar α, β von Aufteilungen und eine charakteristische Funktion v, so daß gleichzeitig $\alpha \succ \beta$ und $\beta \succ \alpha$ erfüllt sind. ◊

Definition 7.4.3 (Lösung). Eine Menge $\mathscr{L}$ von Aufteilungen heißt *Lösung des Spiels*, wenn

1. es zu keinem $\beta \in \mathscr{L}$ ein $\alpha \in \mathscr{L}$ mit $\alpha \succ \beta$ gibt,
2. es zu jedem $\beta \notin \mathscr{L}$ ein $\alpha \in \mathscr{L}$ mit $\alpha \succ \beta$ gibt.

Eine Lösung dominiert also alle beliebigen Aufteilungen, aber keine Aufteilung in einer Lösung wird von einer anderen Aufteilung *in der Lösung*[14] dominiert.

Bemerkung 7.4.4. Lösungen sind die Aufteilungen, nach denen man suchen sollten und für die sich die Spieler entscheiden sollten. Sie stellen den *Status quo* dar, auf dessen Basis sich Koalitionen bilden sollten. Denn für jede andere Aufteilung kann man eine Aufteilung in der Lösung finden, die für eine wirksame Koalition besser ist, so daß es für die Angehörigen dieser Koalition besser ist, sich für die Aufteilung aus der Lösung zu entscheiden. In diesem Sinne ist die Lösung die Menge aller „guten“ Aufteilungen, für die man sich entscheiden kann und sollte.

Nach so vielen Definitionen und Begriffen wird es langsam Zeit, diese ein wenig mit Leben zu versehen.

[14]Was aber nicht ausschließt, daß es außerhalb der Lösung eine dominierende Aufteilung gibt, die nun aber ihrerseits wieder von einer Aufteilung aus der Lösung dominiert wird – Dominanz ist halt nun einmal **nicht** transitiv!

Proposition 7.4.5. *Für ein unwesentliches Spiel gibt es genau eine Aufteilung, nämlich* $\alpha = \boldsymbol{v}$, *für ein wesentliches Spiel einen* $(n-1)$*–dimensionales Kontinuum von Aufteilungen, der* $\boldsymbol{v}$ nicht *enthält.*

Beweis: Sei $\beta = \boldsymbol{v} + \delta$ eine Auszahlung, dann ist wegen (7.4.1) $\delta = \beta - \boldsymbol{v} \geq \mathbf{0}$ und

$$\mathbf{1}^T \delta = \mathbf{1}^T (\beta - \boldsymbol{v}) = \underbrace{\mathbf{1}^T \beta}_{=0} - \underbrace{\sum_{j=1}^{n} v(j)}_{=-n\gamma} = n\,\gamma.$$

Ist das Spiel unwesentlich, also $\gamma = 0$, dann folgt aus $\delta \geq 0$ und $\mathbf{1}^T \delta = 0$ auch $\delta = \mathbf{0}$, ist hingegen $\gamma > 0$, dann wählen wir $\delta_1, \dots, \delta_{n-1} \geq 0$ so, daß

$$0 \leq \delta_n = n\gamma - \sum_{j=1}^{n-1} \delta_j$$

erhalten bleibt. $\boldsymbol{v} + \delta$ ist dann die gewünschte Aufteilung und muss wegen $\delta \neq 0$ auch von $\boldsymbol{v}$ verschieden sein. □

Korollar 7.4.6. *Jede Lösung* $\mathscr{L}$ *erfüllt* $\mathscr{L} \neq \emptyset$.

Beweis: Es gibt mindestens eine Aufteilung, nämlich $\boldsymbol{v}$, und entweder haben wir es mit einem unwesentlichen Spiel zu tun, dann ist die eine Lösung, oder das Spiel ist wesentlich, dann muss $\boldsymbol{v}$ durch ein $\alpha \in \mathscr{L}$ dominiert werden. □

Für den Rest dieses Kapitels wollen wir uns auf die Suche nach Spielen machen, bei denen es **die** Lösung gibt, bei denen die Lösung also nur aus einem einzigen Element besteht. Allerdings ist die Antwort auch wieder enttäuschend.

Satz 7.4.7. *Ein Spiel besitzt genau dann eine einelementige Lösung, wenn es unwesentlich ist.*

Auf dem Weg zum Beweis von Satz 7.4.7 wollen wir gleich noch ein paar andere Fakten über wesentliche und unwesentliche Spiele und die zugehörigen Aufteilungen sammeln.

Proposition 7.4.8. *Ist das Spiel wesentlich und* α *eine Aufteilung, dann existiert immer eine Aufteilung* β, *so daß* $\beta \succ \alpha$, *aber* nicht $\alpha \succ \beta$ *gilt.*

Beweis: Da das Spiel wesentlich ist, muß $\alpha \neq \boldsymbol{v}$ sein, es gibt also mindestens einen Index j, und $\varepsilon > 0$, so daß

$$\alpha_j = v(j) + \varepsilon$$

ist. Wir setzen

$$\beta_k = \begin{cases} \alpha_j - \varepsilon = v(j), & j = k, \\ \alpha_j + \varepsilon/(n-1), & j \neq k, \end{cases} \tag{7.4.4}$$

und behaupten, daß β eine Aufteilung ist. Tatsächlich ist $\beta \geq \boldsymbol{v}$ und

$$\mathbf{1}^T \beta = \alpha_j - \varepsilon + \sum_{k \neq j} \left(\alpha_j + \frac{\varepsilon}{n-1} \right) = \mathbf{1}^T \alpha = 0.$$

Außerdem ist jede $(n-1)$–elementige Koalition, insbesondere $K = \mathbb{N}_n \setminus \{j\}$, wirksam für *jede* Auszahlung δ, insbesondere für β, da sich nach der Komplementaritätsregel 2 aus Proposition 7.3.5

$$\sum_{k \in K} \delta_k = -\delta_j \leq -v(j) = v(K)$$

ergibt. Da außerdem trivialerweise $K \neq \emptyset$ und nach Konstruktion in (7.4.4) auch $\beta_k > \alpha_k$, $k \in K$, gilt, erhalten wir, daß $\beta \succ \alpha$. Wäre nun auch $\alpha \succ \beta$, dann bedeutet das nach (7.4.4), daß wir die „entscheidende" Koalition K nur als $\{j\}$ wählen können, nur ist die leider nicht wirksam[15] für α, weil ja

$$v(K) = v(j) \leq \beta_j < \alpha_j = \sum_{k \in K} \alpha_k$$

gelten muß. □

Die Beobachtungen aus diesem Beweis sammeln wir noch einmal gesondert auf.

Korollar 7.4.9. *Koalitionen aus $n-1$ Personen sind wirksam für* alle *Aufteilungen, einelementige Koalitionen sind in Sachen Dominanz bedeutungslos.*

Und jetzt fehlen uns nur noch ein paar einfache Folgerungen aus Proposition 7.4.8 um Satz 7.4.7 beweisen zu können.

Korollar 7.4.10. *Eine* undominierbare *Aufteilung α mit*

$$\{\beta \in \mathbb{R}^n \;:\; \beta \succ \alpha\} = \emptyset$$

existiert genau dann, wenn das Spiel unwesentlich ist.

Beweis: Ist das Spiel unwesentlich, dann gibt es nach Proposition 7.4.5 ohnehin nur eine Aufteilung, nämlich $\boldsymbol{v}$, und es existiert keine andere Aufteilung, die diese dominieren könnte. Ist hingegen das Spiel wesentlich, dann sagt uns Proposition 7.4.8, daß jede Aufteilung dominiert werden kann. □

Korollar 7.4.11. *Ein Spiel mit $\#\mathscr{L} = 1$ ist unwesentlich.*

Beweis: Sei $\mathscr{L} = \{\alpha\}$. Weil $\mathscr{L}$ eine Lösung ist, wird jedes $\beta \notin \mathscr{L}$ durch ein Element von $\mathscr{L}$ dominiert und da $\#\mathscr{L} = 1$ ist, kann dieses dominante Element nur α sein, also:

$$\beta \neq \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \beta \notin \mathscr{L} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \succ \beta.$$

Wäre das Spiel nun wesentlich, dann gibt es aber, wieder nach Proposition 7.4.8, ein β, das nicht von α und damit auch nicht von $\mathscr{L}$ dominiert wird. □

Beweis von Satz 7.4.7: Ist $\#\mathscr{L} = 1$, dann ist das Spiel unwesentlich, siehe Korollar 7.4.11, ist das Spiel unwesentlich, dann gibt es genau die eine Aufteilung $\boldsymbol{v}$ und $\mathscr{L} = \{\boldsymbol{v}\}$ ist trivialerweise die gewünschte einelementige Lösung. □

7.5 Dreipersonenspiele

Um ein wenig ein Gefühl für die Struktur von Lösungen zu bekommen, wollen wir uns als nächstes einmal die Situation im einfachsten, aber nicht mehr einfachen Fall ansehen, und zwar bei einem reduzierten Dreipersonenspiel, bei dem wir der Einfachheit halber auch noch die Normierung $\gamma = 1$ verwenden wollen. Der Wert von Koalitionen ist dann also

$$v(K) = \begin{cases} 0, & \#K = 0, 3, \\ -1, & \#K = 1, \\ 1, & \#K = 2, \end{cases}$$

[15] Zur Erinnerung: Die Koalition muß für die *dominierende* Aufteilung wirksam sein.

und es stellt sich die Frage, welche Struktur Lösungen hier haben und wie überhaupt Dominanz aussieht. Eine Aufteilung $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ muß die Bedingungen

$$\alpha_j \ge -1, \quad j = 1,2,3, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

erfüllen, was automatisch auch die Schranke $\alpha_j \le 2$ liefert. Außerdem haben wir es hier ja nur mit einer zweiparametrigen Menge zu tun, da sich aus den Nebenbedingungen automatisch $\alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2$ ergibt. Dies drei Achsen kann man natürlich in ein zweidimensionales

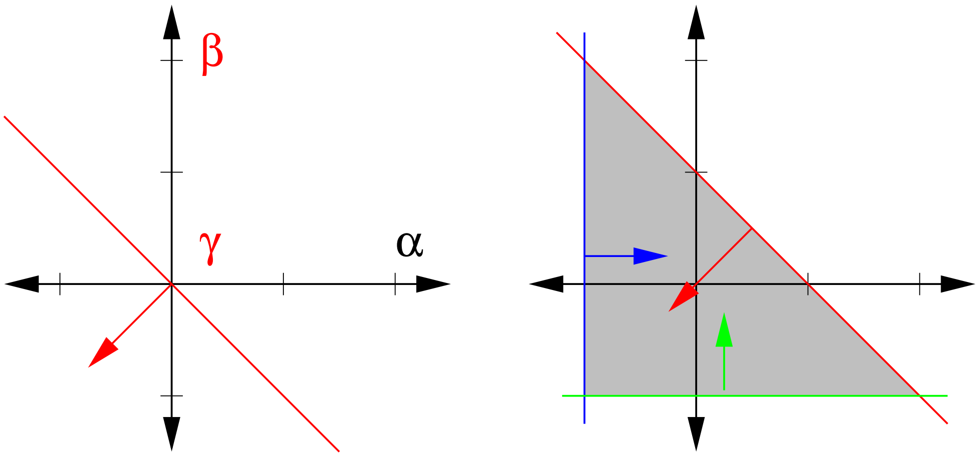

Abbildung 7.5.1: Die Nebenbedingung für (α, β, γ), insbesondere die Bereiche, auf denen γ konstant ist (links) und der zulässige Bereich (rechts) für die Aufteilungen – man sieht, es ist wieder einmal ein Dreieck.

Koordinatensystem eintragen und erhält so schnell eine schöne Darstellung des zulässigen Bereichs der Aufteilungen, siehe Abb. 7.5.1. Für einen Punkt α aus diesem Dreieck können wir uns nun all diejenigen β ansehen, für die $\alpha \succ \beta$ gilt, und das ist bei Dreipersonenspielen noch einfach: Nach Korollar 7.4.9 sind die einelementigen Koalitionen bedeutungslos, aber die zweielementigen *müssen* berücksichtigt werden,

$$\alpha \succ \beta \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \alpha_1 > \beta_1, & \alpha_2 > \beta_2, \\ \alpha_1 > \beta_1, & \alpha_3 > \beta_3, \\ \alpha_2 > \beta_2, & \alpha_3 > \beta_3. \end{cases} \tag{7.5.1}$$

Diese Bereiche sind in Abb. 7.5.2 dargestellt. Ist andererseits keine der Bedingungen in (7.5.1) erfüllt und stimmen α, β in keiner Komponente überein[16], dann ist entweder α oder β in zwei der Komponenten überlegen und damit automatisch in der dritten unterlegen. Also:

$$\alpha_j \ne \beta_j, \quad j = 1,2,3, \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \succ \beta \quad \text{oder} \quad \beta \succ \alpha.$$

Damit zerfällt also für jedes α das Dreieck im wesentlichen in zwei Teile: Diejenigen Aufteilungen, die von α dominiert werden, und diejenigen, die α dominieren.

Wie aber sieht nun eine Lösung aus? Nachdem $\mathscr{L} \ne \emptyset$ ist, gibt es sicherlich ein $\alpha \in \mathscr{L}$, das dann also irgendwie so wie in Abb. 7.5.2 aussehen wird. Da sich Elemente der Lösung nicht gegenseitig dominieren dürfen, also

$$\mathscr{L} \cap \{\beta \;:\; \alpha \succ \beta\} = \mathscr{L} \cap \{\beta \;:\; \beta \succ \alpha\} = \emptyset$$

[16] Wenn sie in zwei Komponenten übereinstimmen, dann natürlich auch in allen dreien und damit wären sie identisch, und wenn sie in genau einer übereinstimmen, dann liegen sie auf den farbigen Linien in Abb. 7.5.2.

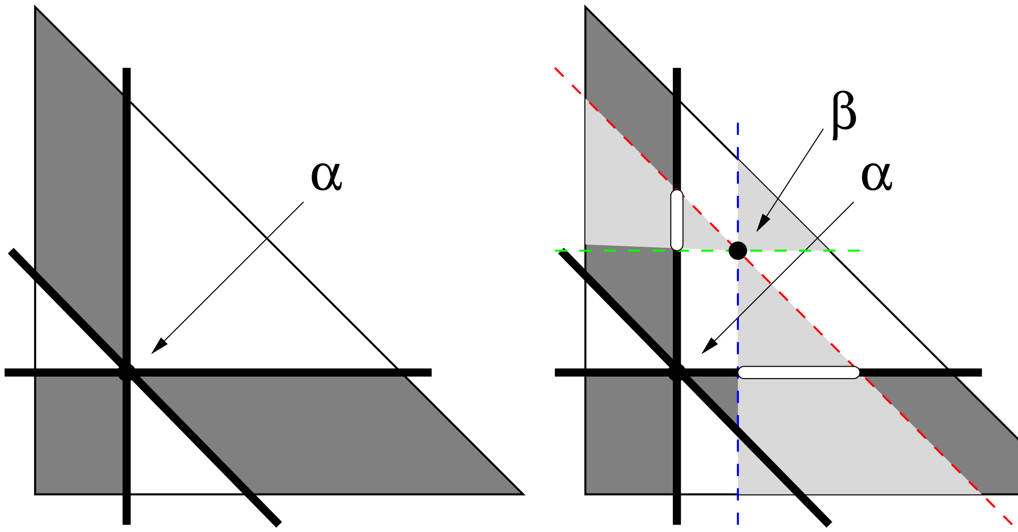

Abbildung 7.5.2: *(Links)* Die von α dominierten Aufteilungen sind genau die schraffierten Bereiche; alle anderen Aufteilungen dominieren ihrerseits α. Nur die Punkte, die auf den fetten Linien liegen, sind nicht mit α vergleichbar, dominieren also weder α, noch werden sie von α dominiert. *(Rechts)* Jeder Punkt $\beta > \alpha$ wird seinerseits wieder durch Punkte auf einer der farbigen Linien dominiert. Das sind die Schnittbereiche bzw. „Schatten" der hellgrauen Zonen, in denen nun wieder β dominiert wird, mit den fetten Linien.

gelten muß, sind die schraffierten Bereiche aus Abb. 7.5.2 bereits tabu, und dasselbe gilt auch für die nicht–schraffierten Bereiche, von denen ja α dominiert wird. Andererseits kann die Lösung aber nicht nur aus α selbst bestehen, denn es muß ja zu jeder Aufteilung auch ein Element der Lösung geben, das diese Aufteilung dominiert. Nach unseren obigen Überlegungen dürfen wir die anderen Elemente von $\mathscr{L}$ nun aber nur noch auf den drei Linien suchen, auf denen jeweils ein α_j konstant ist, siehe Abb. 7.5.2, rechts.

Nehmen wir einmal an, daß wie im Bild $\beta_1 > \alpha_1$ und $\beta_2 > \alpha_2$ ist, also $\beta_3 < \alpha_3$, dann sind die dominanten Punkte auf der Linie von der Form

$$(\alpha_1, \alpha_2 + \varepsilon, \alpha_3 - \varepsilon), \qquad \varepsilon \in [\beta_2 - \alpha_2, \alpha_3 - \beta_3],$$

bzw.

$$(\alpha_1 + \varepsilon, \alpha_2, \alpha_3 - \varepsilon), \qquad \varepsilon \in [\beta_1 - \alpha_1, \alpha_3 - \beta_3],$$

und daß diese Intervalle nichtleer sind, sieht man daran, daß

$$\alpha_3 - \beta_3 - (\beta_2 - \alpha_2) = \alpha_3 - \beta_3 - \beta_2 + \alpha_2 = \beta_1 - \alpha_1 > 0$$

und entsprechend

$$\alpha_3 - \beta_3 - (\beta_1 - \alpha_1) = \alpha_3 - \beta_3 - \beta_1 + \alpha_1 = \beta_2 - \alpha_2 > 0$$

ist. Und für jedes β mit $\beta_j > \alpha_j$, $j = 1, 2$, *muss* mindestens ein Punkt aus diesem Intervall ebenfalls zu $\mathscr{L}$ gehören. Wir sehen also: So einfach ist die Sache mit den Lösungen definitiv nicht.

Gehen wir das Problem also etwas systematischer an. Das Spiel ist wesentlich, somit besteht die Lösung nach Satz 7.4.7 aus mindestens zwei Lösungen, $\alpha \neq \alpha'$. Da die beiden Lösungen einander nicht dominieren dürfen, müssen sie auf einer achsenparallelen

Geraden im Dreieck der zulässigen Auflösungen liegen; ohne Einschränkung können wir annehmen, daß es sich hierbei um eine senkrechte Gerade handelt, daß also $\alpha_1 = \alpha_1'$ ist und weiterhin $\alpha_2 < \alpha_2'$ gilt. Nun können α und α' zusammen keine Lösung bilden, denn

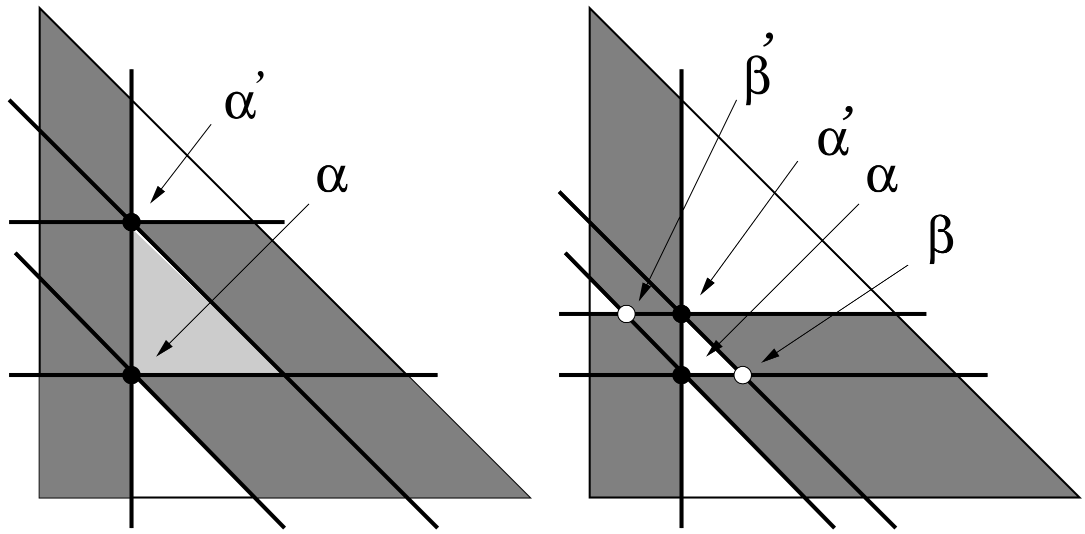

Abbildung 7.5.3: *(Links)* Die beiden Punkte α, α' und der Bereich, den sie dominieren bzw. von dem sie beide dominiert werden. Während man die beiden weißen Bereiche noch dadurch loswerden kann, daß man α ganz nach unten und α' ganz nach oben schiebt, ist der hellgraue Zwischenbereich unvermeidbar. *(Rechts)* Die beiden einzig möglichen Punkte β, β' außerhalb der gemeinsamen Geraden von α und α'.

jeder Punkt δ der Form

$$\delta = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha') + \left(\varepsilon, -\frac{\varepsilon}{2}, -\frac{\varepsilon}{2}\right), \qquad 0 < \varepsilon < \min\left\{\alpha_2' - \alpha_2, \alpha_3 - \alpha_3'\right\} \tag{7.5.2}$$

erfüllt

$$\delta_1 > \alpha_1 = \alpha_1', \qquad \alpha_2 < \delta_2 < \alpha_2' \qquad \text{und} \qquad \alpha_3' < \delta_3 < \alpha_3,$$

also insbesondere

$$\delta_1 > \alpha_1,\ \delta_2 > \alpha_2 \qquad \text{sowie} \qquad \delta_1 > \alpha_1',\ \delta_3 > \alpha_3'$$

und dominiert sowohl α als auch α' ohne selbst von einem der beiden Punkte dominiert zu werden, weswegen $\mathscr{L} = \{\alpha, \alpha'\}$ keine Lösung sein kann. Diese Punkte sind gerade der hellgraue Bereich in Abb 7.5.3, links.

Weitere Punkte der Lösung können nun entweder auf der Geraden duch α und α' liegen, oder aber nicht. Beginnen wir mit letzterem Fall, also mit der Existenz eines weiteren Lösungselements β, das *nicht* $\beta_1 = \alpha_1 = \alpha_1'$ erfüllt. Da dieser Punkt weder α noch α' dominieren darf, noch von einem der beiden dominiert werden darf, muß β auf den beiden anderen achsenparallelen Linien durch die beiden Punkte liegen, es gibt also maximal zwei weitere Punkte in $\mathscr{L}$, nämlich

$$\beta = \left(\alpha_1 + \alpha_2' - \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3 - \alpha_2' + \alpha_2\right), \qquad \beta' = \left(\alpha_1 - \alpha_2' + \alpha_2, \alpha_2', \alpha_3 + \alpha_2' - \alpha_2\right), \tag{7.5.3}$$

siehe wiederum Abb. 7.5.3. Damit das funktioniert, muß allerdings

$$\alpha_2' - \alpha_2 < \alpha_3 + 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \alpha_2' - \alpha_2 < \alpha_1 + 1$$

sein: Die beiden Punkte dürfen also, relativ zur Position von α, nicht zu weit auseinanderliegen. Beide Punkte, β und β', dürfen aber nun auch wieder nicht zu $\mathscr{L}$ gehören, denn sie sind nicht durch eine achsenparallele Gerade verbunden, das heißt, einer von beiden dominiert den anderen; und in der Tat ist

$$\beta' - \beta = \left(\alpha_2' - \alpha_2\right)(-2,1,2) \qquad \Rightarrow \qquad \beta' \succ \beta.$$

Nun ist aber $\mathscr{L} = \{\alpha, \alpha', \beta\}$ auch wieder keine Lösung, weil der Punkt δ aus (7.5.2) auch

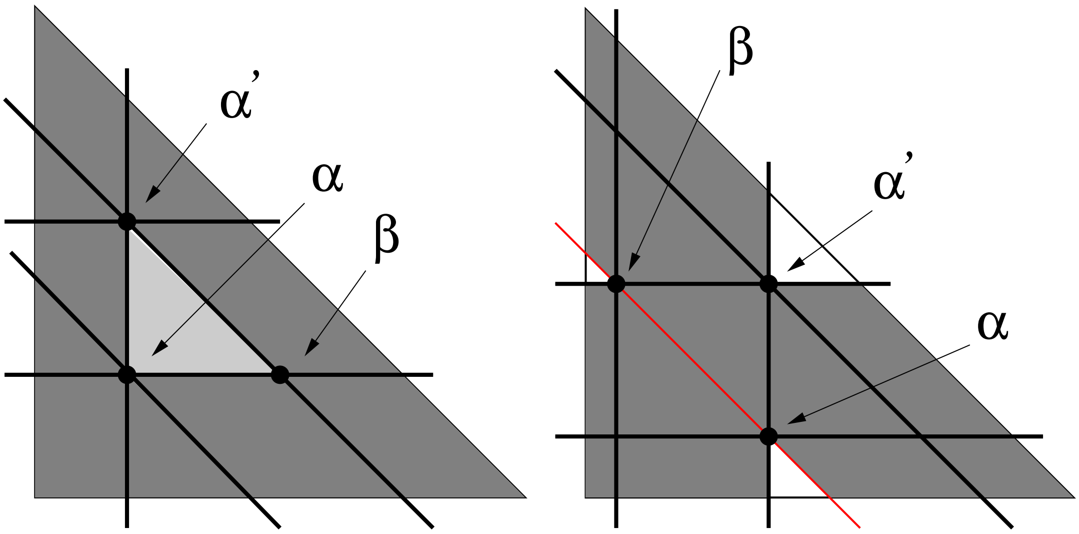

Abbildung 7.5.4: *(Links)* Der Punkt β aus (7.5.3) ist keine hilfreiche Erweiterung von α und α', da der hellgraue Bereich immer noch undominiert bleibt. *(Rechts)* Die Auswahl β stimmt schon optimistischer, allerdings bleiben immer noch drei kleine Dreiecke weiß, aber das kann man ja beheben, indem man α ganz nach unten, α' ganz nach oben und β ganz nach links schiebt.

von β nicht dominiert wird, da

$$\begin{aligned}
\delta - \beta &= \left(\alpha_1 + \varepsilon, \frac{\alpha_2 + \alpha_2' - \varepsilon}{2}, \frac{\alpha_3 + \alpha_3' - \varepsilon}{2}\right) - \left(\alpha_1 + \alpha_2' - \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3 - \alpha_2' + \alpha_2\right) \\
&= \left(\varepsilon + \alpha_2 - \alpha_2', -\frac{\varepsilon + \alpha_2 - \alpha_2'}{2}, \alpha_2' - \alpha_2 - \frac{\varepsilon + \alpha_3' - \alpha_3}{2}\right) = (-,+,+)
\end{aligned}$$

ist. Das sieht man ja auch in Abb. 7.5.4. Die andere Wahl, also β', ist da schon vielversprechender[17], aber es bleiben trotzdem erst einmal noch drei kleine Dreiecke übrig, die $\mathscr{L} = \{\alpha, \alpha', \beta\}$ dominieren – es sein denn, wir schieben α ganz nach unten, α' ganz nach oben und β ganz nach links, fordern also, daß, wieder mit (7.5.3),

$$\begin{aligned}
\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= (\alpha_1, -1, 1 - \alpha_1), \\
\alpha' = \left(\alpha_1, \alpha_2', \alpha_3'\right) &= (\alpha_1, 1 - \alpha_1, -1), \\
\beta' = (2\alpha_1 - 2, 1 - \alpha_1, 1 - \alpha_1) &= (-1, \beta_2, \beta_3)
\end{aligned}$$

[17] Vielleicht ist das auch schon deswegen nicht so abwegig, weil ja β' die dominante der beiden Auswahlen ist.

sein muß, was genau für $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ und somit

$$\begin{aligned}\alpha &= \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right), \\ \alpha' &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right), \\ \beta &= \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

erfüllt ist. Die von diesen drei Punkten gebildete Menge ist eine Lösung und es ist die einzige dreipunktige, denn vertauscht man die Rolle der Geraden, entlang derer α und α' übereinstimmen sollen, dann vertauscht man nur einen der beiden Punkte mit β. Und diese Lösung kommt uns sehr bekannt vor: Die Gewinnkoalition „zwei gegen einen" teilt die Beute jeweils fair auf, das ist genau die natürliche Lösung, die man sich erhoffen würde.

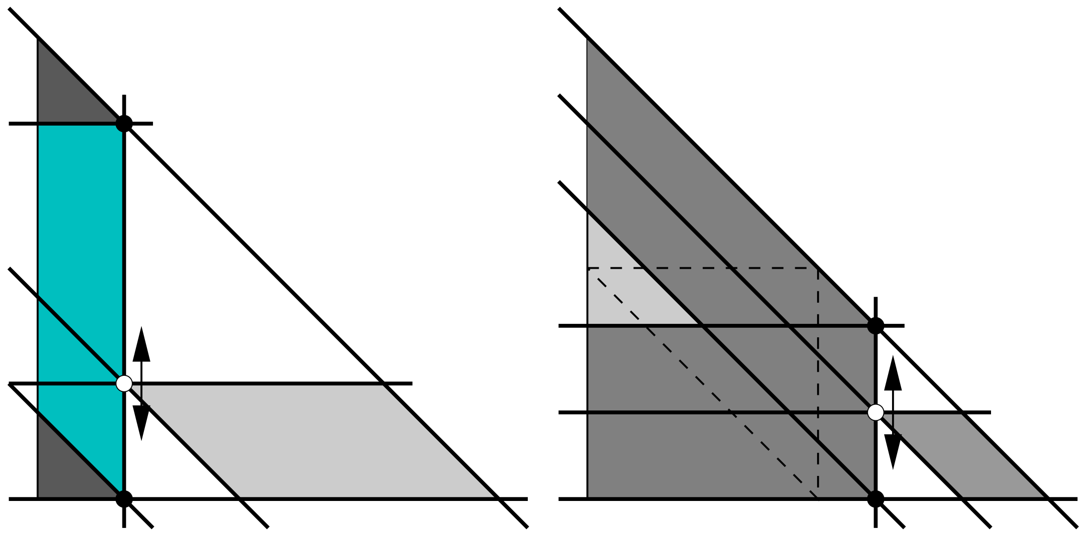

Abbildung 7.5.5: Alle Lösungen liegen auf einer senkrechten Linie ℓ, $\alpha_1 = c$. *(Links)* Der Wert von c ist hinreichend klein und die Linie dominiert alles. Um die Aufteilungen links von ℓ kümmern sich die beiden Extremalpunkte, alles was rechts von ℓ liegt, wird von einem der Zwischenpunkte dominiert. *(Rechts)* Ist der Wert von c so groß, daß die Linie rechts vom Dreieck der natürlichen Lösungen liegt, dann kann das hellgraue Dreieck am linken Rand nicht mehr dominiert werden, die Linie ist *keine* Lösung.

Bleibt noch ein Fall, nämlich der, daß alle Punkte der Lösung auf der Geraden ℓ durch α und α' liegen. Nachdem kein Punkt dieser Geraden $\ell = \{\beta \ : \ \beta_1 = \alpha_1\}$ von $\mathscr{L} \subseteq \ell$ dominiert wird[18], aber jeder *nicht* zu $\mathscr{L}$ gehörige Punkt von einem Element aus $\mathscr{L}$ dominiert sein muß, bleibt uns nur eines übrig:

$$\mathscr{L} = \ell = \{\alpha \ : \ \alpha_1 = c\} \qquad \text{für ein } c \in [-1, 2]\,.$$

Anstatt jetzt formal an die Sache heranzugehen, sehen wir uns Abb. 7.5.5 an: Wenn $c < \frac{1}{2}$ ist, dann dominiert die Linie tatsächlich alles *(links)*, ist $c = \frac{1}{2}$, dann sind wir im Fall der drei Punkte und die Linie ist verboten, ist hingegen $c > \frac{1}{2}$, dann zeigt die rechte Zeichnung

[18]OK, es dominiert auch kein Punkt von ℓ die Lösung $\mathscr{L}$, es gibt immer Unvergleichbarkeit.

in Abb. 7.5.5, daß es immer ein nichtdominiertes Areal gibt, und die Linie daher keine Lösung sein kann.

Satz 7.5.1. *Das reduzierte und normalisierte Dreipersonenspiel besitzt genau die folgenden Lösungen:*

$$\mathscr{L} = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right), \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right), \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\} \tag{7.5.4}$$

und

$$\mathscr{L} = \left\{ \alpha \ : \ \alpha_j = c \right\}, \qquad j = 1, 2, 3, \quad -1 \le c < \frac{1}{2}. \tag{7.5.5}$$

Bleibt noch die Interpretation der Lösungen in (7.5.5). Beschränken wir uns wieder auf den Fall $j = 1$, dann ist also

$$\mathscr{L} = \{(c, d, -d - c) \ : \ -1 \le d \le 1 - c\}, \qquad -1 \le c < \frac{1}{2}.$$

Das heißt, daß in diesem Falle Spieler 2 und 3, die die Gewinnkoalition bilden, beschließen können, wieviel sie aus Großzügigkeit an Spieler 1, der an sich unterlegen ist, abgeben wollen. Die Art und Weise, wie dieses Almosen untereinander aufgeteilt wird, und genau das ist der zweite freie Parameter d, steht den Spielern 2 und 3 völlig frei. Oder, wie es in [26, 33.1.1, S. 289] erklärt wird:

> *Since the excluded player is absolutely „tabu", the threat of the partner's desertion is removed from each participant of the coalition. There is no way of determining any definite division of the spoils.*
>
> *Incidentially: It is quite instructive to see how our concept of a solution as a set of imputations is able to take care of this situation also.*

Dem ist nichts mehr hinzuzufügen.

8 Einfache Spiele und Mehrheiten

Die Majorität hat viele Herzen, aber ein Herz hat sie nicht.

(O. von Bismarck)

Zum Abschluß befassen wir uns jetzt noch mit Mehrpersonenspielen, bei denen es im wesentlichen auf die Struktur der Koalitionen und eben nicht auf die Auszahlungsfunktion ankommt. Eine ganz besondere Rolle spielen hierbei die sogenannten *einfachen* Spiele.

8.1 Gewinnkoalitionen, Verlustkoalitionen und einfache Spiele

Definition 8.1.1. Mit $\mathscr{K} := \mathscr{P}(\mathbb{N}_n)$ bezeichnen wir die Menge aller Koalitionen von n Spielern, also die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}_n$.

Erinnern wir uns zuerst einmal an das Konzept einer *Gewinnkoalition* $K \in \mathscr{K}$ von Definition 7.3.7, nämlich, daß

$$v(K) > \sum_{j \in K} v(j) \tag{8.1.1}$$

gelten soll. Dieser Begriff ist natürlich nur für *wesentliche* Spiele sinnvoll, bei unwesentlichen Spielen sind ja alle Koalitionen flach und es gibt insbesondere gar keine Gewinnkoalitionen. Nun bezeichnen wir mit $\mathscr{G} \subset \mathscr{K}$ die Menge aller Gewinnkoalitionen, mit $\mathscr{V} \subset \mathscr{K}$ hingegen die Menge aller *Verlustkoalitionen*, also derjenigen Koalitionen, die (8.1.1) nicht erfüllen und somit eine *flache Menge* sind. Das führt sofort zu ersten einfachen Beobachtungen.

Proposition 8.1.2 (Gewinnkoalitionen). *Für ein wesentliches Spiel gilt:*

1. $\mathscr{G} \cap \mathscr{V} = \emptyset$, $\mathscr{K} = \mathscr{G} \cup \mathscr{V}$.
2. *Ist* $\overline{K} \in \mathscr{V}$, *dann ist* $K \in \mathscr{G}$ *und umgekehrt.*
3. *Ist* $K \in \mathscr{G}$ *und* $K \subseteq K'$, *dann ist* $K' \in \mathscr{G}$.
4. *Ist* $K \in \mathscr{V}$ *und* $K \supseteq K'$, *dann ist* $K' \in \mathscr{V}$.
5. $K \in \mathscr{V}$ *wann immer* $\#K \leq 1$ *ist.*

Beweis: 1) ist offensichtlich, denn entweder gilt in (8.1.1) „>" oder „=", aber nicht beides gleichzeitig. Für 2) nehmen wir an, daß $\overline{K} \in \mathscr{V}$ wäre. Dann ist

$$\begin{aligned} v(K) &= -v\left(\overline{K}\right) = -\sum_{j \in \overline{K}} v(j) = -\sum_{j=1}^{n} v(j) + \sum_{j \in K} v(j) = -\underbrace{\sum_{j=1}^{n} v'(j)}_{=-n\gamma} + \sum_{j \in K} v(j) \\ &= \sum_{j \in K} v(j) + n\gamma > \sum_{j \in K} v(j), \end{aligned}$$

und für die Umkehrung müssen wir nur die Rollen von K und $\overline{K}$ vertauschen. Zum Beweis von Aussage 3) berechnet man

$$\begin{aligned} v\left(K'\right) &\ge v\left(K\right) + v\left(K' \setminus K\right) \ge v\left(K\right) + \sum_{j \in K' \setminus K} v(j) \\ &> \sum_{j \in K} v(j) + \sum_{j \in K' \setminus K} v(j) = \sum_{j \in K'} v(j), \end{aligned}$$

und 4) ganz analog durch

$$\begin{aligned} v\left(K'\right) &\le v\left(K\right) - v\left(K \setminus K'\right) \le v\left(K\right) - \sum_{j \in K \setminus K'} v(j) = \sum_{j \in K} v\left(j\right) - \sum_{j \in K \setminus K'} v(j) \\ &= \sum_{j \in K'} v\left(j\right) \le v\left(K'\right) \end{aligned}$$

wegen Proposition 7.3.5; also muß überall Gleichheit gelten und K' ist eine Verlustkoalition. Punkt 5) ist trivial[1]. □

Was uns der Beweis von Proposition 8.1.2 allerdings nicht liefert, ist eine Aussage, daß das Komplement einer Gewinnkoalition automatisch eine Verlustkoalition wäre. Und das hat einen guten Grund: Das muß gar nicht sein.

Beispiel 8.1.3. Wir betrachten ein reduziertes Vierpersonenspiel mit $\gamma = 1$, also

$$v(K) = \begin{cases} 0, & \#K = 0, 4, \\ -1, & \#K = 1, \\ 1, & \#K = 3, \end{cases}$$

und legen für zweielementige Mengen außerdem

$$v(K) = \begin{cases} 1, & 1 \in K, \\ -1, & 1 \notin K, \end{cases}$$

fest, es gewinnt also[2] bei den Zweierkoalitionen immer die, in der Spieler 1 sitzt. Diese Situation entspricht einem Gremium, in dem der Vorsitzende bei Stimmengleichheit den Ausschlag gibt[3]. Dann ist aber *jede* Zweierkoalition immer noch eine Gewinnkoalition, da für $j, k \in \mathbb{N}_4$

$$v\left(\{j,k\}\right) \ge -1 > -2 = v(j) + v(k)$$

gilt.

Es besteht also ein Unterschied zwischen Koalitionen, die gewinnen und Koalitionen, deren Gegner verlieren; diesen Unterschied wollen wir auch in der Sprechweise zum Ausdruck bringen.

Definition 8.1.4. Eine Koalition $K \in \mathscr{K}$ heißt *strikte Gewinnkoalition*, wenn $\overline{K}$ eine Verlustkoalition ist, und die Menge aller strikten Gewinnkoalitionen soll mit $\mathscr{G}^* \subset \mathscr{K}$ bezeichnet werden.

[1] Im wirklichen Sinne des Wortes! Es folgt direkt aus der Definition.
[2] Nur aus Gründen der Einfachheit!
[3] Beispielsweise in Fachbereichsräten, wo bei Stimmengleichheit der Dekan entscheidet.

Proposition 8.1.2, 2) sorgt nun dafür, daß diese Terminologie auch wirklich sinnvoll ist, das heißt, daß $\mathscr{G}^* \subseteq \mathscr{G}$ gilt, bzw., daß jede *strikte* Gewinnkoalition auch immer eine Gewinnkoalition ist. Die nächste Beobachtung verknüpft strikte Gewinnkoalitionen mit der Wesentlichkeit eines Spiels.

Proposition 8.1.5. *Das Spiel ist genau dann wesentlich, wenn $\mathscr{G}^* \cap \mathscr{V} = \emptyset$ ist und für jedes unwesentliche Spiel ist $\mathscr{G}^* \cup \mathscr{V} = \mathscr{K}$.*

Beweis: Fast schon zu einfach: Ist das Spiel wesentlich, dann ist nach Proposition 8.1.2 $\mathscr{G} \cap \mathscr{V} = \emptyset$ und die Behauptung folgt sofort aus der Tatsache, daß $\mathscr{G}^* \subset \mathscr{G}$ ist. Ist hingegen das Spiel unwesentlich, dann ist sowieso

$$v(K) = \sum_{j \in K} v(j), \quad K \in \mathscr{K}, \qquad \Rightarrow \qquad \mathscr{V} = \mathscr{K}, \quad \mathscr{G}^* = \emptyset,$$

und was wollen wir mehr. □

Definition 8.1.6 (Einfaches Spiel). Ein wesentliches Spiel heißt *einfach*, wenn $\mathscr{G}^* = \mathscr{G}$ ist, wenn also alle Gewinnkoalitionen strikte Gewinnkoalitionen sind.

Beispiel 8.1.7. Das Dreipersonenspiel ist einfach. Nehmen wir die reduzierte Variante, dann sagt uns Bemerkung 7.3.12 ja, daß das Spiel eindeutig durch γ bestimmt ist, nämlich

$$v(K) = \begin{cases} 0, & \#K = 0,3, \\ -\gamma, & \#K = 1, \\ \gamma, & \#K = 2. \end{cases}$$

Gewinnkoalitionen sind also die Dreierkoalition und alle Zweierkoalitionen. Die leere Menge, als Komplement der Dreierkoalition, erfüllt natürlich

$$0 = v(\emptyset) = \sum_{j \in \emptyset} v(j) = 0$$

trivialerweise[4], die Zweierkoalitionen hingegen haben als Komplemente einelementige Mengen, die ebenfalls trivialerweise zu $\mathscr{V}$ gehören. Also sind alle Gewinnkoalitionen Komplemente von Verlustkoalitionen, und das Spiel ist einfach.

8.2 Mehrheiten

Es gibt eine ganze Klasse von einfachen Spielen, nämlich die *Mehrheitsspiele*, bei denen es nur darauf ankommt, die größere Koalition zu bilden. Und wenn man, im Gegensatz zu Beispiel 8.1.3, die charakteristische Funktion passend definiert, dann wird das Spiel auch tatsächlich einfach.

Für ungerades $n = 2\nu + 1$ ist die Sache mit den Mehrheiten ja klar: $K \in \mathscr{V}$ genau dann, wenn $\#K < n/2$ bzw. $\#K \le \nu$. Die Auszahlungen sind dann natürlich

$$v(K) = \begin{cases} (n - \#K)\,\gamma, & \#K > n/2, \\ -\#K\,\gamma, & \#K < n/2, \end{cases} \qquad \gamma > 0,$$

und dieses Nullsummenspiel ist wesentlich und einfach[5], denn das Komplement einer Gewinnkoalition ist immer eine flache Verlustkoalition. Für gerades n geht das natürlich nicht

[4]Der Wert der leeren Summe ist auf 0 *festgelegt*!

[5]Und symmetrisch, die Rolle der Spieler ist vertauschbar; generell hängt bei symmetrischen Spielen (die man über Permutationsgruppen definieren kann) der Wert einer Koalition nur von der Anzahl ihrer Mitglieder ab, siehe [26, p. 255–260].

so einfach, aber man kann ja immer noch *gewichtete* Mehrheiten einführen. Dazu verwendet man einen n–dimensionalen Vektor $\boldsymbol{w} = \left[w_j \ : \ j \in \mathbb{N}_n \right] \in \mathbb{R}^n$ von nichtnegativen Zahlen, $w_j \ge 0$, $j \in \mathbb{N}_n$, und definiert

$$\mathscr{G} = \left\{ K \in \mathscr{K} \ : \ \sum_{j \in K} w_j > \sum_{j \in \overline{K}} w_j \right\}, \qquad \mathscr{V} = \left\{ K \in \mathscr{K} \ : \ \sum_{j \in K} w_j < \sum_{j \in \overline{K}} w_j \right\}. \qquad (8.2.1)$$

Das klassische Mehrheitsspiel für ungerades n ist dann natürlich nichts anderes als $\boldsymbol{w} = \mathbf{1}$. Damit das Spiel nun einfach ist, muß die charakteristische Funktion v' des reduzierten Spiels den Wert

$$v'(K) = \begin{cases} -\#K\gamma, & K \in \mathscr{V}, \\ (n - \#K)\,\gamma, & K \in \mathscr{G}, \end{cases} \qquad (8.2.2)$$

haben, was auch jedes v bis auf strategische Äquivalenzen bzw. einen spielunabhängigen konstanten Geldfluß $\boldsymbol{b}$ festlegt.

Bemerkung 8.2.1. Wir haben uns inzwischen ganz unauffällig angewöhnt, Mehrpersonenspiele nur noch durch ihre charakteristische Funktion zu beschreiben, ohne uns wirklich Gedanken darüber zu machen, ob so etwas überhaupt noch in den bisherigen Kontext eines Spiels mit Auszahlungsfunktion und gemischten Strategien und so weiter passt. Denn eigentlich ist ja bisher die charakteristische Funktion eine Konsequenz der Auszahlungsfunktion und nicht umgekehrt. Glücklicherweise ist das aber kein Problem und in [26, **26**, S. 243–245] wird auch beschrieben, wie man zu *jeder* gegebenen charakteristischen Funktion ein passendes Spiel konstruieren kann.

Damit die in (8.2.2) definierten Mengen $\mathscr{V}$ und $\mathscr{G}$ wirklich $\mathscr{K}$ erzeugen, muß $\boldsymbol{w}$ gewisse Eigenschaften haben, denn beispielsweise im Fall $n = 2\nu$ und $\boldsymbol{w} = \mathbf{1}$ gibt es ja *Pattsituationen* und alle $K \in \mathscr{K}$ mit $\#K = n/2$ gehören weder zu $\mathscr{G}$ noch zu $\mathscr{V}$. Da außerdem die einelementigen Koalitionen ja immer Verlustkoalitionen sein sollen, bedeutet dies, daß der Vektor $\boldsymbol{w}$ genau die Bedingungen

$$0 \le w_j < \frac{1}{2} \mathbf{1}^T \boldsymbol{w}, \qquad \sum_{j \in K} w_j \neq \frac{1}{2} \mathbf{1}^T \boldsymbol{w}, \quad K \in \mathscr{K}, \qquad (8.2.3)$$

erfüllen muss, um zwischen Gewinn- und Verlustkoalitionen entscheiden zu können.

Übung 8.2.1 Bestimmen Sie den Gewichtsvektor $\boldsymbol{w}$ für gerades $n = 2\nu$ und die Vereinbarung, daß Spieler 1 bei Stimmengleichheit entscheidet. ◇

8.3 Lösungen für einfache Spiele

Schließlich wollen wir uns noch mit der Frage auseinandersetzen, wie denn dann die Lösungen einfacher Spiele aussehen, nehmen also von nun an immer an, daß wir es stets mit einem einfachen Spiel zu tun haben. Zuerst rekapitulieren wir aber noch einmal, was wir bisher so herausgefunden haben:

Jedes einfache Spiel ist durch $\mathscr{G}$ bzw.[6] $\mathscr{V}$ bis auf strategische Äquivalenzen festgelegt.

[6]Die beiden Mengen sind Komplemente voneinander, $\mathscr{K} = \mathscr{G} \cup \mathscr{V}$, $\mathscr{G} \cap \mathscr{V} = \emptyset$. Kennt man also die eine, so kennt man auch die andere.

Da bei einfachen Spielen $K \in \mathscr{G}$ und $\overline{K} \in \mathscr{V}$ äquivalent sind, hat das reduzierte Spiel immer die durch (8.2.2) festgelegte Form und jedes dazu verwandte Spiel ist damit ja strategisch äquivalent. Für die Beschreibung von Gewinn oder Verlust braucht man aber jetzt nicht mehr alle Koalitionen, sondern nur noch diejenigen, die keinen „unnötigen" Verlierer enthalten.

Definition 8.3.1. Eine Gewinnkoalition $K \in \mathscr{G}$ heißt *minimal*, wenn alle ihre echten Teilmengen Verlustkoalitionen sind:

$$K' \subset K \qquad \Rightarrow \qquad K' \in \mathscr{V}.$$

Die Menge aller minimalen Gewinnkoalitionen bezeichnen wir mit $\mathscr{G}^m$.

Proposition 8.3.2. *Jede Gewinnkoalition $K \in \mathscr{G}$ besitzt (mindestens) eine Teilmenge $K \supseteq K_m \in \mathscr{G}^m$.*

Beweis: Einelementige Teilmengen sind sichere Verlierer, also sehen wir nach, ob irgendeine zweielementige Teilmenge $K' \subseteq K$ eine Gewinnkoalition ist. Wenn ja, dann ist sie minimal, denn all ihre Teilmengen sind Verlierer, wenn nein, dann betrachten wir eben die dreielementigen Teilmengen, und so weiter. Da K selbst Gewinnkoalition ist, finden wir irgendwann Teilmengen mit minimaler Kardinalität, die ebenfalls Gewinnkoalitionen sind, und genau diese sind die minimalen Gewinnkoalitionen zu K. □

Es ist intuitiv klar, daß die minimalen Gewinnkoalitionen die entscheidende Rolle bei den einfachen Spielen spielen werden, denn warum sollte man eine Koalition größer machen als zum Gewinnen nötig, und außerdem ist der zur verteilende Gewinn einer Koalition im reduzierten Spiel ja nach (8.2.2) der Betrag $\#\overline{K}\,\gamma$, was nichts anderes als *„Viel Feind – viel Ehr'"* bedeutet.

Machen wir uns also wieder an die Aufteilungen, aber nur für das reduzierte Spiel. Ein Mitglied der Gewinnkoalition K wird den Betrag $-\gamma + \xi_j$, $j \in K$, für sich beanspruchen können, ein Spieler aus der Gruppe der Verlierer wird wohl $-\gamma$ einbringen müssen[7], so daß sich insgesamt

$$\alpha = \boldsymbol{v} + \xi, \qquad \boldsymbol{v} = -\gamma \mathbf{1}, \qquad \xi \geq 0, \quad 0 = \left[\xi_j \;:\; j \in \overline{K}\right] =: \xi_{\overline{K}}, \tag{8.3.1}$$

ergibt. Dieses α ist genau dann ein Aufteilung, wenn

$$0 = \mathbf{1}^T \alpha = -n\gamma + \sum_{j \in K} \xi_j \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{j \in K} \xi_j = n\gamma$$

ist, wobei $n\gamma$ genau der Mehrwert für die Koalition K ist: Ihr Gewinn als Solisten wäre $-\#K\gamma$, aber die Auszahlung an die Koalition ist ja laut (8.2.2) gerade der Wert $(n - \#K)\,\gamma$, also ein Zugewinn um $n\,\gamma$, der über ξ_K an die Koalition ausgegeben wird.

Auszahlungen der Form (8.3.1) sind nun gute Kandidaten für Lösungen, vor allem dann, wenn wir es uns noch ein wenig einfacher machen. Tatsächlich werden wir ein System $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{G}^m$ von *minimalen* Gewinnkoalitionen betrachten, einen Vektor ξ mit

$$\xi \geq 0, \qquad \mathbf{1}^T \xi_K = n\gamma, \qquad K \in \mathscr{U},$$

[7] Der Gesamtgewinn von $\overline{K}$ beträgt $-\#\overline{K}\,\gamma$ und da kein Spieler seinen zu erwartenden Maximalverlust $-\gamma$ unterschreiten, also mehr verlieren, will, ist dies die kanonische Aufteilung.

suchen und jedem $K \in \mathscr{U}$ eine Aufteilung

$$\alpha^K = \nu + \xi_K, \qquad \text{d.h.} \qquad \alpha_j^K = \begin{cases} -\gamma, & j \notin K, \\ -\gamma + \xi_j, & j \in K, \end{cases} \tag{8.3.2}$$

zuordnen. Die Lösung werden wir als $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\mathscr{U}) = \left\{\alpha^K \;:\; K \in \mathscr{U}\right\}$ ansetzen. Bleibt nur noch die Frage: *Wann ist dieses $\mathscr{L}$ denn auch wirklich eine Lösung und wie sieht diese aus?* Um diese Frage zu beantworten, müssen wir nochmals ein wenig Mathematik betreiben.

Definition 8.3.3. Für $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{G}^m$ definieren wir

$$\mathscr{U}^* := \bigcup_{K \in \mathscr{U}} \bigcup_{K' \supseteq K} K' \qquad \text{und} \qquad \mathscr{U}^+ := \left\{K \in \mathscr{K} \;:\; \overline{K} \notin \mathscr{U}^*\right\}. \tag{8.3.3}$$

Mit anderen Worten: $\mathscr{U}^*$ enthält alle Obermengen von Koalitionen[8] in $\mathscr{U}$, insbesondere auch $\mathscr{U}$ selbst, die Menge $\mathscr{U}^+$ hingegen besteht aus allen Koalitionen, die nicht Verlustkoalitionen gegen eine der Koalitionen aus $\mathscr{U}^*$ sind.

Lemma 8.3.4. *Die Operationen „$*$" und „$+$" haben die folgenden Eigenschaften:*

1. *$\mathscr{U} \subset \mathscr{U}^*$ und $\mathscr{U} \subset \mathscr{U}^+$.*
2. *Ist $\mathscr{U} = \mathscr{G}^m$, dann ist $\mathscr{U}^* = \mathscr{U}^+ = \mathscr{G}$.*
3. *Sie sind* monoton *bzw.* antiton, *d.h.*
$$\mathscr{U}_1 \subseteq \mathscr{U}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathscr{U}_1^* \subseteq \mathscr{U}_2^* \quad \textit{bzw.} \quad \mathscr{U}_1^+ \supseteq \mathscr{U}_2^+.$$
4. *Für jedes $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{G}^m$ ist $\mathscr{U}^* \subseteq \mathscr{G} \subseteq \mathscr{U}^+$.*
5. *Mit jeder Menge K sind auch alle Obermengen $K' \supseteq K$ in $\mathscr{U}^*$ bzw. $\mathscr{U}^+$ enthalten.*

Beweis: Die erste Hälfte von 1) ist trivial. Ist $K \in \mathscr{U}$, dann ist $\overline{K}$ eine Verlustkoalition und kann daher keine Obermenge einer Koalition aus $\mathscr{U}$ sein, denn die sind ja alle minimale Gewinnkoalitionen. Das heißt aber nichts anderes als $\overline{K} \notin \mathscr{U}^*$, also $K \in \mathscr{U}^+$, und da das für alle $K \in \mathscr{U}$ der Fall ist, ist $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{U}^+$.

2): Für $\mathscr{U} = \mathscr{G}^m$ sagt uns Proposition 8.3.2, daß $\mathscr{U}^* = \mathscr{G}$ ist, also ist besteht $\mathscr{U}^+$ aus allen Mengen, deren Komplemente keine Gewinnkoalitionen sind, und weil das Spiel einfach ist, sind das die Komplemente aller Verlustkoalitionen, ergo alle Gewinnkoalitionen, und somit ist $\mathscr{U}^+ = \mathscr{G}$.

3): Die Monotonie von $*$ ist klar und die Antitonie von $+$ folgt daraus, daß wir es ja mit Komplementen von $*$ zu tun haben.

4): Jedes $K \in \mathscr{U}^*$ ist Obermenge einer minimalen Gewinnkoalition, also selbst wieder eine Gewinnkoalition und gehört deswegen zu $\mathscr{G}$; das Komplement $\overline{K}$ jeder Gewinnkoalition $K \in \mathscr{G}$ ist aber wegen der Einfachheit des Spiels eine Verlustkoalition und kann deswegen nicht Obermenge einer minimalen Gewinnkoalition sein. Also ist $\overline{K} \notin \mathscr{U}^*$ und folglich $K \in \mathscr{U}^+$.

Auch Aussage 5) ist für U^* trivial. Ist andererseits $K \subseteq K'$ und $K \in \mathscr{U}^+$, dann bedeutet das, daß

$$\mathscr{U}^* \not\ni \overline{K} \supseteq \overline{K'}$$

sein muß und wäre nun $K' \notin \mathscr{U}^+$, also $\overline{K'} \in \mathscr{U}^*$, dann wäre auch $\overline{K} \in \mathscr{U}^*$, also $K \notin \mathscr{U}^+$, was einen Widerspruch liefert. □

[8] Ist also der Abschluß von $\mathscr{U}$ unter Bildung von Obermengen!

Proposition 8.3.5. *Eine Aufteilung β ist genau dann von $\mathscr{L}(\mathscr{U})$ undominiert, wenn*

$$\mathscr{U}^+ \ni \left\{ j \in \mathbb{N}_n \ : \ \beta_j \ge -\gamma + \xi_j \right\} =: R_{\mathscr{U}}(\beta) =: R(\beta). \tag{8.3.4}$$

Beweis: Wir drehen die Frage einfach um und fragen, wann β von einem α^K, $K \in \mathscr{U}$, dominiert wird. Dazu brauchen wir eine für α^K wirksame Koalition $J \in \mathscr{K}$, so daß $\alpha_J^K > \beta_J$ ist. Als erstes bemerken wir, daß $J \subseteq K$ sein muß, denn für $j \in \overline{K}$ ist nach (8.3.2)

$$\alpha_j^K = -\gamma \le \beta_j,$$

da ja α^K und β beide Aufteilungen und somit $\ge \boldsymbol{v} = -\gamma \mathbf{1}$ sind. Ist hingegen $J \subset K$ eine echte Teilmenge von K, dann ist J keine Gewinnkoalition mehr, denn K war eine minimale Gewinnkoalition und weil das Spiel einfach ist, muß J eine Verlustkoalition sein[9] und daher

$$-\#J\,\gamma = \sum_{j \in J} v(j) = v(J)$$

erfüllen. Daß J für α^K wirksam ist, bedeutet aber andererseits zusammen mit $\xi^K \ge 0$, daß

$$-\#J\,\gamma = v(J) \ge \sum_{j\in J} \alpha_j^K = \sum_{j \in J} -\gamma + \xi_j^K = -\#J\,\gamma + \mathbf{1}^T \xi_J \qquad \Rightarrow \qquad \xi_J = 0$$

sein muß, weswegen wieder $\alpha_J^K = \beta_J = -\gamma\,\mathbf{1}$ zu sein hat, also wieder keine Dominanz.

Anders gesagt: Die Dominanz $\alpha^K \succ \beta$ ist äquivalent dazu, daß die zugehörige wirksame Menge genau K ist und es muß $\alpha_K^K = \boldsymbol{v} + \xi_K > \beta_K$ gelten, was insbesondere $\xi_K > 0$ liefert. Oder nochmals umformuliert:

$$\alpha^K \succ \beta \qquad \Leftrightarrow \qquad R(\beta) \subseteq \overline{K} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{R(\beta)} \supseteq K.$$

Also wird β genau dann durch *irgendein* α^K mit $K \in \mathscr{U}$ dominiert, wenn $\overline{R(\beta)} \in \mathscr{U}^*$ liegt und ist undominiert durch $\mathscr{L}(\mathscr{U})$ wenn $\overline{R(\beta)} \notin \mathscr{U}^*$, also $R(\beta) \in \mathscr{U}^+$ ist. □

Wenn wir schon mal beim Umformulieren sind, dann können wir Proposition 8.3.5 nochmals anders schreiben und so die einfachen Lösungen für einfache Spiele charakterisieren.

Korollar 8.3.6. *$\mathscr{L}(\mathscr{U})$ ist genau dann eine Lösung, wenn*

$$\alpha \in \mathscr{L}(\mathscr{U}) \qquad \Leftrightarrow \qquad R(\alpha) \in \mathscr{U}^+. \tag{8.3.5}$$

Beweis: Direkte Konsequenz aus Proposition 8.3.5: Jedes $\beta \notin \mathscr{L}(\mathscr{U})$ muß von $\mathscr{L}(\mathscr{U})$ dominiert werden, also muß $R(\beta) \notin \mathscr{U}^+$ sein, jedes $\alpha \in \mathscr{L}(\mathscr{U})$ darf hingegen nicht von $\mathscr{L}(\mathscr{U})$ dominiert werden, muß also $R(\alpha) \in \mathscr{U}^+$ erfüllen. □

Satz 8.3.7. *$\mathscr{L}(\mathscr{U})$ ist genau dann eine Lösung, wenn*

$$\mathbf{1}^T \xi_K = n\gamma, \quad K \in \mathscr{U}, \qquad \textit{und} \qquad \mathbf{1}^T \xi_K > n\gamma, \quad K \in \mathscr{U}^+ \setminus \mathscr{U}. \tag{8.3.6}$$

Beweis: Wir wählen $K \in \mathscr{U}^+$ und sehen uns alle Aufteilungen α an, die $R(\alpha) \in \mathscr{U}^+$ erfüllen, denn die Gesamtheit dieser Aufteilungen muß ja nach Korollar 8.3.6 die Lösung ausmachen. Für jedes solche K betrachten wir nun die Zahl

$$y_K := \mathbf{1}^T \alpha^K = \sum_{j \notin K} (-\gamma) + \sum_{j \in K} \left(\gamma + \xi_j\right) = -n\gamma + \mathbf{1}^T \xi_K$$

und unterscheiden die drei Fälle, daß y_K positiv, negativ oder gleich 0 ist.

[9] Hier haben wir wirklich alle Voraussetzungen in einem Satz verbraten: Einfachheit des Spiels und Minimalität der Gewinnkoalition K. Die Voraussetzungen braucht man also schon, um zu einfachen Lösungen zu kommen.

$y_K > 0$: Da für jedes α mit $R(\alpha) = K$ die Ungleichung

$$0 = \mathbf{1}^T \alpha = \sum_{j \in K} \alpha_j + \sum_{j \notin K} \alpha_j \geq \sum_{j \in K} \left(-\gamma + \xi_j\right) + \sum_{j \notin K} (-\gamma) = y_K \tag{8.3.7}$$

gilt, kann es in diesem Fall kein α mit $R(\alpha) = K$ geben. Damit sind also alle $K \in \mathscr{U}^+$ mit $y_K > 0$ für die Lösung irrelevant und brauchen nicht weiter berücksichtigt zu werden.

$y_K < 0$: In diesem Fall gibt es unendlich viele Möglichkeiten, α so zu wählen, daß $\mathbf{1}^T \alpha = 0$ ist und $\alpha_K \geq -\gamma \mathbf{1} + \xi_K$ sowie $\alpha_{\overline{K}} = -\gamma \mathbf{1}$ erfüllt ist, nämlich $\alpha_K = \alpha_K^K + \delta_K$, $\delta \geq 0$, $\mathbf{1}^T \delta \leq -y_K$; für alle solchen α ist $R(\alpha) \in \mathscr{U}^+$, also $\alpha \in \mathscr{L}(\mathscr{U})$, weswegen die Lösung ebenfalls unendlich viele Elemente haben müsste, was aber ihrer Definition in (8.3.2) widerspricht, nach der $\mathscr{L}(\mathscr{U})$ nur aus $\#\mathscr{U} < \infty$ Elementen bestehen kann.

Also kann nur $y_K = 0$, das heißt, $\mathbf{1}^T \xi_K = n\gamma$ gelten, wenn wir überhaupt ein Element der Lösung mit $R(\alpha) = K$ haben wollen.

Ist nun $\alpha \in \mathscr{L}(\mathscr{U})$, das heißt, es gibt ein $K \in \mathscr{U}$, so daß $\alpha = \alpha^K$ ist, dann ist

$$R(\alpha) = K \cup \left\{ j \in \overline{K} \ : \ \xi_j = 0 \right\} \supset K,$$

und da $K \in \mathscr{U} \subseteq \mathscr{U}^* \subseteq \mathscr{U}^+$, siehe Lemma 8.3.4, 1) und 4), und da $\mathscr{U}^+$ unter Obermengenbildung abgeschlossen ist, ist auch $K \in \mathscr{U}^+$. Außerdem ist

$$\sum_{j \in R(\alpha)} \xi_j = \sum_{j \in K} \xi_j = \mathbf{1}^T \xi_K = n\,\gamma,$$

was die erste Hälfte von (8.3.6) liefert und alle $\alpha \in \mathscr{L}(\mathscr{U})$ erledigt. Sei umgekehrt $K \in \mathscr{U}^+$ eine Koalition mit $\mathbf{1}^T \xi_K = n\gamma$; wenn wir K durch

$$K' = K \cup \left\{ j \in \overline{K} \ : \ \xi_j = 0 \right\}$$

ersetzen, dann ist ebenfalls $K' \in \mathscr{U}^+$ und $\mathbf{1}^T \xi_{K'} = n\gamma$. Jede Aufteilung β mit $R(\beta) = K'$ erfüllt $\beta_{K'} \geq -\gamma \mathbf{1} + \xi_{K'}$ und $\beta \geq -\gamma \mathbf{1}$ und daher ist wieder

$$0 = \mathbf{1}^T \beta = \mathbf{1}^T \beta_{K'} + \mathbf{1}^T \beta_{\overline{K'}} \geq -\gamma \# K' + \mathbf{1}^T \xi_{K'} - \gamma\,(n - \# K') = -n\gamma + \mathbf{1}^T \xi_{K'} = 0, \tag{8.3.8}$$

was nur mit

$$\beta_j = \begin{cases} -\gamma, & j \notin K', \\ -\gamma + \xi_j, & j \in K', \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \beta = \alpha^{K'} \tag{8.3.9}$$

zu erreichen ist, denn jedes „>" würde auch in (8.3.8) zu „>" führen und damit den Widerspruch $0 > 0$ ergeben. Hat umgekehrt eine Aufteilung β die Form wie in (8.3.9), dann ist $R(\beta) \in \mathscr{U}^+$ und nach Korollar 8.3.6 muß $\beta \in \mathscr{L}(\mathscr{U})$, also $\beta = \alpha^K$, $K \in \mathscr{U}$. Also:

Eine Koalition $K \in \mathscr{U}^+$ erfüllt genau dann $\mathbf{1}^T \xi_{K'} = n\gamma$, wenn $\alpha^K \in \mathscr{L}(\mathscr{U})$ ist.

Damit ist der Beweis vollständig. □

Bemerkung 8.3.8.

1. Wir haben bei der Formulierung von Satz 8.3.7 ein wenig gemogelt und die j mit $\xi_j = 0$ unter den Tisch fallen lassen, die die Sache ein wenig unhandlicher machen, da sie die Aufteilungen unverändert lassen. Diese Indizes entsprechen Spielern, für die es völlig bedeutungslos ist, ob sie einer Koalition angehören oder nicht, und die man daher als *irrelevant* bezeichnen kann. Dieser Effekt wird auch in [26] angeführt, allerdings findet sich in einer Fußnote die folgende Aussage über diese j:

> *These j constitute a slight complication which is further agrravated by the fact that we have no example of a game in which they actually occur. It may be that they never exist ...*

2. Besonders einfach wird die Struktur, wenn wir $\mathscr{U} = \mathscr{G}^m$, also die Menge aller minimalen Gewinnkoalition wählen, denn dann müssen wir ξ nur so wählen, daß

$$\sum_{j \in K} \xi_j = n\gamma, \qquad K \in \mathscr{G}^m,$$

ist.

Beispiel 8.3.9 (Einfache Mehrheiten).

1. Im einfachen Dreipersonen–Mehrheitsspiel sind die Gewinnkoalitionen $(1,2)$, $(1,3)$ und $(2,3)$ und ξ muss damit eine positive Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\gamma \\ 3\gamma \\ 3\gamma \end{bmatrix}$$

sein, also $\xi_j = \frac{3}{2}\gamma$, alles vollkommen symmetrisch und wieder mal unsere Standardlösung „halb–halb“.

2. Bei fünf Spielern gibt es nun schon $\binom{5}{3} = 10$ minimale Gewinnkoalitionen und das zugehörige Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\gamma \\ 5\gamma \\ 5\gamma \\ 5\gamma \\ 5\gamma \end{bmatrix}$$

ist zwar überbestimmt, hat aber trotzdem die positive Lösung $\xi_j = \frac{5}{3}\gamma$.

3. Wann immer man $n = 2m+1$ Spieler hat und einfache Mehrheiten aus $m+1$ Spielern bestehen, ist $\xi_j = \frac{2m+1}{m+1}\gamma$ ein Vektor, aus dem man einfache Lösungen konstruieren kann.

8.4 Einfache Lösungen für gewichtete Mehrheiten

Beispiel 8.3.9 legt schon nahe, daß es einen engen Bezug zwischen ξ und dem Gewichtungsvektor des Mehrheitsspiels geben sollte. Sei also $0 \le \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ ein Gewichtungsvektor, der ohne Einschränkung so normiert sein soll, daß $\mathbf{1}^T \boldsymbol{w} = 1$ ist.

Definition 8.4.1. Die *einfache Hauptlösung* eines (Mehrheits-)Spiels ist $\mathscr{L}(\mathscr{G}^m)$, also die Lösung, die gerade durch die minimalen Gewinnkoalitionen definiert wird.

Die Bedingung an ξ ergibt sich in diesem Fall als

$$\sum_{j\in K} \xi_j = n\gamma, \qquad K \in \mathscr{U} = \mathscr{G}^m. \tag{8.4.1}$$

Eine minimale Gewinnkoalition zeichnet sich hingegen dadurch aus, daß ihr Gewicht $> \frac{1}{2}\mathbf{1}^T \boldsymbol{w} = \frac{1}{2}$ ist, wenn aber auch nur ein Teilnehmer abspringt, dann geht diese Eigenschaft verloren. Also,

$$K \in \mathscr{G}^m \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2} < \sum_{j\in K} w_j < \frac{1}{2} + \min_{j\in K} w_j. \tag{8.4.2}$$

Zu einem $K \in \mathscr{G}^m$ können wir also die *Stärke* von K als $s_K := \mathbf{1}^T \boldsymbol{w}_K$ definieren und den Anteil von Spieler j zu dieser Koalition als w_j/s_K, $j \in K$. Im Falle eines *homogenen* Spiels, nämlich dann, wenn $s_K = s$, $K \in \mathscr{G}^m$, für ein festes $s > 0$, stimmen ξ und $\boldsymbol{w}$ bis auf Normierung überein:

$$\xi = \frac{n\gamma}{s}\,\boldsymbol{w}.$$

Beispiel 8.4.2 (Homogene Spiele).

1. Alle einfachen Mehrheitsspiele mit $n = 2m+1$ Spielern und $\boldsymbol{w} = \mathbf{1}$ haben $s = m+1$ und sind damit homogen.

2. Das „Fachbereichsratsspiel“ mit $n = 2m$ und $\boldsymbol{w} = [1+\alpha, 1, \dots, 1]$, $0 < \alpha \leq 1$, ist genau dann homogen, wenn $\alpha = 1$ ist, da die minimalen Gewinnkoalitionen entweder aus m Spielern inclusive Spieler 1 oder $m+1$ Spielern ohne Spieler 1 bestehen und die zugehörigen Stärken $m+\alpha$ bzw. $m+1$ sind. Ist also $\alpha = 1$, dann ergibt sich ξ als

   $$\xi_1 = \frac{4m}{m+1}\,\gamma, \qquad \xi_2 = \cdots = \xi_n = \frac{2m}{m+1}\,\gamma,$$

   der Dekan ist also doppelt so viel wert wie alle anderen.

3. Ein anderes Extremspiel basiert auf $\boldsymbol{w} = [n-2, 1, \dots, 1]$ und ist homogen, da die minimalen Gewinnkoalitionen entweder von der Form $(1, j)$, $j \in \mathbb{N}_n \setminus \{1\}$, oder von der Form $\mathbb{N}_n \setminus \{1\}$ sind[10], und damit Stärke $n-1$ haben. Die einfachen Lösungen basieren dann also auf dem Vektor ξ mit

   $$\xi_1 = \frac{n(n-2)}{n-1}\,\gamma, \qquad \xi_2 = \cdots = \xi_n = \frac{n}{n-1}\,\gamma.$$

   Das ist aber nur *eine* Lösung – dieses Spiel wird in [26, 55, S. 473–503] genauer untersucht.

Aber ein Beispiel haben wir noch, und zwar eines, bei dem ein Spieler mehr oder weniger ausgeschlossen wird und zwar so, daß man für ihn *jedes* beliebige ξ_j wählen kann.

Beispiel 8.4.3 (Alle gegen einen). Wir wählen $n = 4$ und erklären eine Zweierkoalition zur Gewinnkoalition, wenn ihr Spieler 1 *nicht* angehört und zur Verlustkoalition, wenn Spieler 1 dabei ist, eine Art Inverse des Fachbereichsrats. Dann enthält jede Dreierkoalition eine zweielementige Gewinnkoalition, und zwar:

$(1,\mathbf{2},\mathbf{3})$, $(1,\mathbf{2},\mathbf{4})$, und jede zweielementige Teilmenge von $(2,3,4)$,

[10] Also entweder schleimt sich einer beim starken Spieler ein, oder aber es geht alle gegen einen.

die minimalen Gewinnkoalitionen sind also $(2,3)$, $(2,4)$ und $(3,4)$ und die Bedingung an ξ mit $\mathscr{U} = \mathscr{G}^m$ sind

$$\xi_2 + \xi_3 = \xi_2 + \xi_4 = \xi_3 + \xi_4 = 4\gamma,$$

was sich mit $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 2\gamma$ erfüllen lässt. Der Wert von ξ_1 hingegen kann absolut frei gewählt werden, insbesondere auch als $\xi_1 = 0$. Ob das eine Antwort auf Bemerkung 8.3.8 ist?

Eine allgemeine Theorie der Mehrpersonenspiele ist offensichtlich eine äußerst komplexe Angelegenheit, und auch wenn wir jetzt die wesentlichen Grundbegriffe kennengelernt haben, sind wir weit davon entfernt, diese Theorie wirklich durchschaut zu haben. Aber dafür muss man sich intensiver mit dem Thema beschäftigen, wofür immer noch [26] eine erstklassige Referenz ist.

Manches sagt ich,
mehr noch wollt ich,
ließe zur Rede
Raum das Geschick.
Die Stimme weicht,
Wunden schwellen:
Wahres sprach ich;
will nun enden.
(Die Edda, Das jüngere Sigurdlied*)*

Literaturverzeichnis

[1] K. J. Arrow, *Social choice and individual values*, Wiley, 1951.

[2] L. E. J. Brouwer, *Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Math. Annalen **71** (1911), 97–115.

[3] W. Dahmen and C. A. Micchelli, *Convexity and Bernstein polynomials on k–simploids*, (1988), Preprint Nr. A-88-09.

[4] G. B. Dantzig, *Linear programming and extensions*, Pinceton University Press, 1963.

[5] M. D. Davis, *Game Theory. A Nontechnical Introduction*, Basic Books, 1983, Dover Reprint 1997.

[6] Ph. des Palliéres and H. Marly, *Die Werwölfe von Düsterwald*, Pro Ludo, 2002.

[7] G. Fischer, *Lineare Algebra*, Vieweg, 1984.

[8] O. Forster, *Analysis I*, Vieweg, 1976.

[9] S. I. Gass, *An illustrated guide to linear programming*, McGraw–Hill, 1970, Republished by Dover, 1990.

[10] J. von zur Gathen and J. Gerhard, *Modern computer algebra*, Cambridge University Press, 1999.

[11] A. M. Glicksman, *An introduction to linear programming and the theory of games*, John Wiley & Sons, 1963, Dover Reprint 2001.

[12] G. Golub and C. F. van Loan, *Matrix computations*, The Johns Hopkins University Press, 1983.

[13] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis. Teil 1*, 3. ed., B. G. Teubner, 1984.

[14] N. J. Higham, *Accuracy and stability of numerical algorithms*, 2nd ed., SIAM, 2002.

[15] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985.

[16] K. Jacobs, *Einführung in die Kombinatorik*, de Gruyter, 1983.

[17] S. Karlin, *Mathematical methods and theory in games, programming and economics*, Dover Phoenix Editions, Addison–Wesley, 1959, Dover Reprint 2003.

[18] A. N. Kolmogoroff, *A remark on the polynomials fo Chebyshev, deviating at least from a given function*, Ushepi **3** (1948), 216–221, Probably in Russian.

[19] G. G. Lorentz, *Approximation of functions*, Chelsea Publishing Company, 1966.

[20] R. D. Luce and H. Raiffa, *Games and Decisions. Introduction and a Critical Survey*, John Wiley & Sons, 1957, Dover Reprint 1989.

[21] M. Marcus and H. Minc, *A survey of matrix theory and matrix inequalities*, Prindle, Weber & Schmidt, 1969, Paperback reprint, Dover Publications, 1992.

[22] J. Nash, *The bargaining problem*, Econometrica **18** (1950), 155–162.

[23] ———, *Equilibrium points in n–person games*, Proceedings of the National Academy of Sciences, U. S. A. **36** (1950), 48–49.

[24] ———, *Non–cooperative games*, Annals of Mathematics **54** (1951), 286–295.

[25] J. von Neumann, *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Math. Annalen **100** (1928), 295–320.

[26] J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, sixth paperback printing, 1990 ed., Princeton University Press, 1944.

[27] J. Nocedal and S. J Wright, *Numerical optimization*, Springer Series in Operations Research, Springer, 1999.

[28] A. Rapoport, *Two–Person Game Theory*, The University of Michigan Press, 1966, Dover Reprint 1999.

[29] T. Sauer, *Multivariate Bernstein polynomials and convexity*, Comp. Aided Geom. Design **8** (1991), 465–478.

[30] F. Schiller, *Die Räuber*, Frankfurt und Leipzig, 1781, Geschrieben in der Ostermesse.

[31] H. R. Schwarz, *Numerische Mathematik*, 4th ed., B. G. Teubner, 1997.

[32] P. Spellucci, *Numerische Verfahren der nichtlinearen Optimierung*, Internationale Schriftenreihe zu Numerischen Mathematik, Birkhäuser, 1993.

[33] W.-H. Steeb, *Kronecker product of matrices and applications*, BI–Wiss.–Ver., 1991.

[34] J.D. Williams, *The complete strategyst. Being a primer on the theory of games on strategy*, Dover Publications, 1986, Reprint. Originally Mc–Graw–Hill, 1966.

Index